

# Un observateur continu-discret pour les systèmes avec des non-linéarité de Lipschitz et des mesures discrètes

Ngoc-Thach Dinh et al

**Résumé**— Ce travail concerne le problème de synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires avec des mesures en temps discret (systèmes temps continu-discret). Le résultat est basé sur l'analyse d'accessibilité pour synthétiser une approximation supérieure de l'ensemble atteignable. Lorsque cette approximation est donnée sous forme d'une combinaison convexe des applications linéaires, une condition suffisante est donnée en termes d'inégalité matricielle linéaire qui peut être résolue en utilisant des techniques LMI. Cette approche semble offrir un outil nouveau et efficace pour résoudre le problème de synthèse d'observateur pour une classe de systèmes Lipschitz et de petite dimension. Pour illustrer ce point, un exemple académique a été donné.

## I. INTRODUCTION

Le problème à l'étude dans ce papier est un problème d'estimation d'état pour une classe de systèmes dynamique Lipschitz temps continu et dont la sortie (mesure) est en temps discret. Plus précisément, l'objectif est de concevoir un algorithme fournissant une estimation de l'état d'un système dont la dynamique est en temps continu en connaissant seulement sa sortie donnée par des mesures en temps discret. L'algorithme qui sera utilisé est un observateur continu-discret. L'utilisation des observateurs continus-discrets pour estimer l'état des systèmes non linéaires a déjà été étudiée dans la littérature. On peut remonter à Jazwinski qui a introduit le filtre de Kalman continu-discret pour résoudre un problème de filtrage pour les systèmes stochastiques en temps continu-discret (voir [6]). Inspiré par cette approche, les observateurs à grand gain introduits dans [5] ont été adaptés au contexte continu-discret dans [4]. Par la suite, ce type d'observateurs a aussi été employé sur d'autres classes de systèmes non linéaires dans [9] et [1].

Dans notre travail, les mises à jour de l'algorithme d'estimation se font en deux étapes : i) si aucune mesure n'est disponible, l'estimation est obtenue en intégrant le modèle. ii) lorsque survient une mesure, l'observateur fait une correction impulsive de l'estimation. Remarquons que dans [4] cette correction impulsionnelle est obtenue par intégration de l'équation de Riccati en temps continu discret. Toutefois, il a été démontré dans [8] qu'un gain constant peut également être employée.

Dans toutes les approches mentionnées ci-dessus, la convergence asymptotique de l'estimation de l'état est obtenue en dominant les non-linéarités de type Lipschitz par les techniques de grand gain. Cela peut conduire à des

conditions de conception restrictive sur le pas de temps d'échantillonnage de la mesure .

Récemment, une méthodologie de synthèse de nouvel observateur pour les systèmes non linéaires avec des mesures en temps continu a été introduit par Zemouche et al. dans [12]. Dans leur approche, il est démontré que l'équation différentielle satisfaite par l'erreur d'estimation peut être réécrite sous la forme d'un système linéaire à paramètres variant (LPV). Il est alors montré dans [12] que la convergence vers zéro de l'erreur d'estimation peut être obtenue en résolvant certaines inégalités matricielles linéaires spécifiques. (II pour un bref résumé de cette approche).

Dans [2], les auteurs ont étendu l'approche présentée dans [12] dans le cas de mesures en temps discret en utilisant l'analyse d'accessibilité et en particulier pour systèmes sous forme feedforward. Dans l'approche adoptée, le principal problème est décomposé en deux sous-problèmes : i) Le premier concerne le calcul d'un ensemble atteignable pour un système bilinéaire. Cet ensemble caractérise l'expansion possible de l'erreur d'estimation entre deux mesures lorsque l'estimation est donnée par l'intégration du modèle.

ii) Le second est consacré à la construction d'un terme de correction  $K$  en assurant la convergence vers zéro d'une fonction de Lyapunov de l'erreur. Comme dans [12], cette étape est effectuée par des techniques de LMI.

[2] est le calcul d'un ensemble atteignable pour des systèmes bilinéaires. Pourtant, le calcul exact de cet ensemble atteignable n'est pas nécessaire mais seulement une approximation supérieure.

Le but des travaux menés dans cette article, est d'étendre cette approche pour une classe de systèmes non linéaires plus larges en s'appuyant sur la caractérisation de l'ensemble atteignable obtenue par l'utilisation d'outils de commande optimale.

Cet article est organisé de la façon suivante. Dans la section II, après avoir définie la classe considérée de systèmes, certains résultats préliminaires et en particulier l'approche de [12] pour des mesures en temps continu sont rappelés. Son extension au cas continue discret introduit dans [2] est alors présentée. Cette approche est alors exploitée dans la section III pour la classe des systèmes uniformément observables. Un exemple académique est alors présenté dans la section IV. Enfin, la conclusion est donnée dans la section V.

## II. PRÉLIMINAIRES

### A. Le problème étudié

Sans perte de généralité, la classe de systèmes non-linéaires considérée est décrite par l'équation différentielle

suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \phi(x(t), u(t)) , \quad (1)$$

où l'état  $x$  est dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  est une entrée connue,  $A$  est une matrice de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction globalement Lipschitz ( uniformément par rapport à l'entrée). En d'autres termes, l'hypothèse suivante est considérée :

**Hypothèse 1 :** Pour chaque  $(i, j)$  dans  $[1, n]^2$ , il existe un nombre réel positif  $c_{ij}$  tel que pour tout  $(x, u)$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  :

$$\left| \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x, u) \right| \leq c_{ij} . \quad (2)$$

De plus, nous supposons que l'état  $x$  de système (1) est observable via des mesures en temps discret données par la fonction linéaire de l'état,

$$y_k = Cx(t_k) , \quad (3)$$

où  $C$  est une matrice dans  $\mathbb{R}^{m \times n}$  et  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de nombres réels positifs défini comme suit :  $t_{k+1} = t_k + \delta$  et  $\delta$  est un réel positif représentant le pas d'échantillonnage de la mesure.

L'objectif principal de ce travail est de donner un observateur pour le système (1) qui fourni une estimation  $\hat{x}$  qui converge asymptotiquement vers  $x$  et cela à partir de la connaissance de la sortie  $y_k$  donné en (3).

Inspiré par [4] et [8], l'analyse est limitée à une classe spécifique d'observateurs en temps continu-discret définie par le système hybride suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + \phi(\hat{x}(t), u(t)) , \quad t \in [t_k, t_{k+1}) , \\ \hat{x}(t_k) &= \hat{x}(t_k^-) + K(y_k - C\hat{x}(t_k^-)) , \end{cases} \quad (4)$$

où,

$$\hat{x}(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} \hat{x}(t) . \quad (5)$$

Le problème d'estimation consiste à déterminer un gain  $K$  tel que l'erreur d'estimation  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  converge asymptotiquement vers zéro. L'approche proposée est basée en partie sur le résultat obtenu dans [12] qui est rappelé dans la section suivante.

### B. Une approche dans le cas du temps continu

L'approche publiée dans [12] traite la synthèse d'observateur pour les systèmes sous la forme (1), mais où la sortie est considérée comme une fonctions continue du temps et donnée par :

$$y(t) = Cx(t) , \quad \forall t . \quad (6)$$

Soit  $\mathcal{R}$  l'ensemble de matrices dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$  tel que pour toutes matrices  $R = (R_{ij})_{(i,j) \in \{1,n\}^2}$  dans  $\mathcal{R}$ , les éléments  $R_{ij}$  prennent deux valeurs  $A_{ij} + c_{ij}$  ou  $A_{ij} - c_{ij}$ .

Notez que cet ensemble de matrices est composé de  $2^\rho$  éléments où  $\rho$  est le nombre de  $c_{ij} \neq 0$ .

Dans [12], l'un des résultats présentés peut être résumé par le théorème suivant :

*Théorème 1 :* (cas de mesure en temps continu, [12]) Supposons que l'hypothèse (1) est satisfait pour le système (1). S'il existe une matrice symétrique définie positive  $P$

dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$  et un vecteur  $L$  dans  $\mathbb{R}^n$  tels que l'inégalité matricielle suivante est satisfaite :

$$R'P + PR - C'L - L'C < 0, \quad \forall R \in \mathcal{R}, \quad (7)$$

alors le système

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \phi(\hat{x}(t), u(t)) + P^{-1}L(y(t) - C\hat{x}(t)),$$

est un observateur asymptotique pour le système (1) où  $y$  est la mesure en temps continu donnée par (6). i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}(t) - x(t)| = 0.$$

### C. Une approche basée sur le calcul d'ensemble atteignable

Inspiré par ce résultat, dans ([2]) il a été donné une extension de ce résultat au cas où la mesure est une fonction à temps discret (voir équation (3)). Ce résultat est basé sur le calcul d'une approximation supérieure de l'ensemble atteignable pour un système bilinéaire. Lorsque cette approximation est donnée en termes d'une combinaison convexe d'applications linéaires, une condition suffisante est donnée en termes d'inégalité matricielle linéaire qui peut être résolue en utilisant des méthodes d'optimisations convexes.

En considérant le système (1) et l'observateur donné dans (4), l'erreur d'estimation  $e = \hat{x} - x$  est donnée par le système hybride suivant

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = Ae(t) + \Delta\phi(\hat{x}(t), u(t), e(t)), \quad t \in [k\delta, (k+1)\delta) \\ e(k\delta) = (I_n - KC)e(k\delta^-) \end{cases} \quad (8)$$

où la notation (5) est utilisé et où  $I_n$  est la matrice identité d'ordre  $n$  et  $\Delta\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  est la fonction continue définie comme

$$\Delta\phi(\hat{x}, u, e) = \phi(\hat{x}, u) - \phi(\hat{x} - e, u).$$

En utilisant le théorème de la valeur moyenne, on montre l'existence de  $n$  fonctions  $Z_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, n$  telles que les éléments de la fonction  $\Delta\phi$  satisfassent :

$$\Delta\phi_i(\hat{x}, u, e) = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(z_i(\hat{x}, e), u)e, \quad i = 1, \dots, n . \quad (9)$$

Ainsi, pour  $t$  dans  $[k\delta, (k+1)\delta)$ , l'erreur est une solution du système

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + V(t)e(t) , \quad (10)$$

avec  $V(t)$  un matrice dont les éléments  $v_{ij}(t) = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(z_i(\hat{x}(t), e(t)), u(t))$  satisfont  $|v_{ij}(t)| \leq c_{ij}$ .

L'idée de l'approche dans [2] est de considérer les  $v_{ij}$  comme des variables de contrôle "fictif" dont nous connaissons la borne. L'observateur devra donc converger pour toutes valeurs de  $v_{ij}$  possibles sous la contrainte  $|v_{ij}| \leq c_{ij}$  (hypothèse (1)).

Une façon de formaliser ce problème est d'introduire la notion d'ensemble atteignable en temps fini. Considérons le système bilinéaire (10), et un pas d'échantillonnage  $\delta$ , nous pouvons introduire une fonction multivaluée  $e \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{A}_\delta(e) \subset \mathbb{R}^n$  qui donne l'ensemble accessible en temps  $\delta$  avec la contrainte de commande  $|v_{ij}| \leq c_{ij}$ . Plus précisément, pour tout  $e_0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et pour tout  $e_1$  dans  $\mathcal{A}_\delta(e_0)$ , il existe

une fonction  $t \mapsto V(t) = (v_{ij}(t))_{(i,j) \in \{1,n\}^2}$  telle que pour tout  $t$  dans  $[0, \delta]$ ,

$$|v_{ij}(t)| \leq c_{ij} \quad , \quad 1 \leq i \leq n \quad , \quad 1 \leq j \leq n \quad , \quad (11)$$

et la solution  $e(t)$  du système (10) initialisé en  $e_0$  avec la commande  $v_{ij}(\cdot)$  satisfait  $e(\delta) = e_1$ .

En utilisant cet ensemble  $\mathcal{A}_\delta$ , une condition suffisante formulée sous forme d'inégalité matricielle linéaire garantissant la convergence d'un observateur en temps continu-discret (4) pour le système (1-3) peut être donnée.

*Théorème 2 :* (Observateur Continu Discret, [2]) Sous l'hypothèse (1) et étant donné  $\delta$  la période d'échantillonnage de la sortie, s'il existe  $\ell$  fonctions matricielles  $(t \mapsto (M_i(t))_{i=1,\dots,\ell})$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , une matrice définie positive  $P$  dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$  et un vecteur  $W$  dans  $\mathbb{R}^n$  tels que<sup>1</sup> :

$$\mathcal{A}_\delta(e) \subseteq \text{Conv}_{i=\{1,\dots,\ell\}}\{M_i(\delta)e\} \quad , \quad \forall e \in \mathbb{R}^n \quad (12)$$

et tels que l'inégalité matricielle suivante est satisfaite<sup>2</sup>

$$\begin{bmatrix} P & \star \\ (P + WC)M_i(\delta) & P \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad \forall i \in \{1, \ell\} \quad , \quad (13)$$

Alors,  $K = P^{-1}W$  garanti que l'erreur d'estimation obtenue par l'observateur (4)  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  converge asymptotiquement vers zéro.

La preuve de ce résultat est basée sur une démarche Lyapunov. Il est ainsi démontré que la fonction  $t \mapsto e(t)'Pe(t)$  converge vers 0 pour toutes conditions initiales.

#### D. Quelques remarque sur cette approche

Ainsi suivant cette approche, nous devons dans un premier temps, construire un ensemble atteignable pour des systèmes bilinéaires. Notons que nous devons trouver seulement une approximation supérieure de cette ensemble.

La seconde étape est la construction d'un ensemble de matrice  $M_i(\delta)$  qui nous donne une approximation supérieur de cet ensemble atteignable  $\mathcal{A}$ . Du fait de la structure du système bilinéaire et des contraintes sur les commandes, il peut être démontré qu'il existe toujours des matrices  $M_i(t)$  telles que (12) est satisfaite. Toutefois, pour pouvoir utiliser cette approche, nous devons dans un deuxième temps résoudre une inégalité matricielle. C'est le point clef de cette approche et pour certaines matrices  $M_i(\delta)$  il se peut que cette inégalité matricielle ne soit pas soluble. Toute la question est donc de savoir de quelle façon synthétiser ces matrices  $M_i$  de façon à garantir que l'inégalité matricielle est satisfaite au moins pour des petites valeurs de  $\delta$  (en d'autre terme pour un petit pas d'échantillonnage de la mesure). Dans l'article de Andrieu et Nadri [2], il a été démontré que si l'approche proposée dans [12], donnée dans le théorème 1, s'applique pour le cas de mesure en temps continu, alors pour de petit temps d'échantillonnage l'approche donnée dans le théorème 2 peut être appliquée si les fonctions matricielles  $M_i$  satisfont certaines propriétés locales.

*Proposition 1* (Propriétés locales de  $M_i$ ) Supposons qu'il existe  $P$  et  $L$  satisfaisant l'inégalité matricielle (7) pour un

1. La notation Conv désigne l'enveloppe convexe d'un ensemble de vecteurs.

2.  $\star$  représente la forme symétrique de matrice; i.e.,  $\star = M_i'(\delta)(P + C'W')$

ensemble de matrices  $\mathcal{R}$  donné. Si l'ensemble de fonctions matricielles  $\{t \mapsto M_i(t)\}_{i=1,\dots,\ell}$  est tel que :

1. pour tout  $i$ ,  $M_i(t)$  est une fonction de classe  $C^1$  telle que  $M_i(0) = I_n$ ,
2. et puis

$$\left\{ \frac{dM_i}{dt}(0) \right\}_{i=1,\dots,\ell} \subseteq \mathcal{R} \quad ,$$

alors pour tout  $\delta$  suffisamment petit, l'inégalité matricielle (13) est satisfaite avec la même matrice  $P$  et avec  $W = \delta L$ .

Par ailleurs dans [2], V. Andrieu et M. Nadri ont également donné une application pour des systèmes feedforward. Lorsque la matrice  $A$  et la fonction  $\phi$  ont une structure triangulaire supérieure. En effet, le résultat suivant est démontré.

*Théorème 3 :* (cas des systèmes feedforward) Considérons le système (10) avec la contrainte de commande (11). En supposant que :

- $A$  est une matrice dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$  telle que :  $A(i, j) = a_{ij} = 0$ ,  $\forall 1 \leq j < i \leq n$  ;
- $\phi$  est une fonction lisse satisfaisant une condition globalement lipschitzienne triangulaire supérieure :  $c_{ij} = 0$ ,  $\forall 1 \leq j < i \leq n$  ,

alors il existe un entier positif  $\ell$  et un ensemble de fonctions matricielles de classe  $C^1$  ( $\delta \mapsto M_i(\delta)_{1 \leq i \leq \ell}$ ) à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$  tels que pour tout  $\delta \geq 0$ , l'inclusion (12) est satisfaite.

De plus, pour tout  $i$  dans  $[1, \ell]$ ,  $\frac{dM_i(0)}{dt} \subseteq \mathcal{R}$  et  $M_i(0) = I_n$ .

Ce résultat permet donc d'obtenir une extension des résultats de Zemouche et. al. [12] dans le cas où le système est sous une forme bien particulière.

Dans ce document nous démontrons que ce résultat est aussi valable dans pour des systèmes sous forme observable.

### III. RÉSULTAT PRINCIPAL

#### A. Cas des systèmes uniformément observables

Nous considérons maintenant le cas des systèmes sous forme observable. En d'autres termes, nous supposons que la matrice  $A$  est sous la forme

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \\ \dots & & & 1 \\ \dots & & & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad C = [1, 0, \dots, ] \quad .$$

et

$$\phi_i(x) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad .$$

Dans ce cadre de travail, le résultat suivant peut être obtenu.

*Théorème 4 :* Il existe  $\delta_m > 0$  et un entier positif  $\ell$  et un ensemble de fonctions matricielles de classe  $C^1$  ( $\delta \mapsto M_i(\delta)_{1 \leq i \leq \ell}$ ) à des valeurs dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$  tels que pour tout  $\delta$  dans  $[0, \delta_m]$ , l'inclusion (12) est satisfaite. De plus, pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, \ell\}$ ,  $\frac{dM_i}{dt}(0) \subseteq \text{Conv}\{\mathcal{R}\}$  et  $M_i(0) = I_n$ .

A partir de ce résultat et en exploitant la proposition 1 nous savons que pour des  $\delta$  petits nous pouvons construire un observateur qui estime asymptotiquement l'état du système. Ce résultat n'est pas nouveau du fait que le système est sous forme observable. Ainsi en exploitant les résultat de [8], nous savons qu'il existe un observateur pour des pas

d'échantillonnage  $\delta$  suffisamment petit. Toutefois, l'intérêt de ce théorème réside dans sa démonstration constructive et dans le fait que cette approche n'étant pas basé sur du grand gain nous pouvons considérer des paramètres  $\delta$  plus grands que ce que nous permet l'approche par grand-gain de [8].

### B. Démonstration du théorème 4

L'idée de la démonstration est dans un premier temps de considérer une approximation supérieure de  $\mathcal{A}_\delta$  sous la forme d'un pavé de dimension  $n$ . Ce pavé peut être caractérisé à partir des solutions des deux systèmes suivants :

$$\dot{e}_1^+ = e_2^+, \dots, \dot{e}_{n-1}^+ = e_n^+, \dot{e}_n^+ = \sum_{j=1}^n c_{n,j} |e_j^+|, \quad (14)$$

$$\dot{e}_1^- = e_2^-, \dots, \dot{e}_{n-1}^- = e_n^-, \dot{e}_n^- = - \sum_{j=1}^n c_{n,j} |e_j^-|. \quad (15)$$

Se donnant  $e_0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et les trajectoires respectives de chacun de ces systèmes initialisées en  $e_0$  et noté  $e^+(e_0, \cdot)$  et  $e^-(e_0, \cdot)$  nous pouvons définir un pavé de dimension  $n$   $T(e_0, \delta)$  défini par

$$T(e_0, \delta) = \{e \in \mathbb{R}^n, e_j \in [(e^-(e_0, \delta))_j, (e^+(e_0, \delta))_j]\}$$

Pour des petites valeurs de  $\delta$  cet ensemble nous donne une approximation supérieur de  $\mathcal{A}(e)$  comme l'atteste la proposition suivante dont la démonstration est donnée dans la section suivante.

*Proposition 2* : Il existe  $\delta_m > 0$  tel que pour tout  $e_0$  dans  $\mathbb{R}^n$  nous avons pour tout  $\delta$  dans  $[0, \delta_m]$

$$\mathcal{A}_\delta(e_0) \subseteq T(e_0, \delta)$$

A partir de cette approximation supérieur, nous devons à present définir les matrices  $M_\ell$ . Soit  $\chi(e_0, \delta) = (\chi_1(e_0, \delta), \dots, \chi_n(e_0, \delta))$ , l'application qui à  $e_0$  dans  $\mathbb{R}^n$  donne un sommet du pavé  $T(e_0, \delta)$ . Cette application est continue et  $C^1$  par morceaux. Nous avons donc  $(\chi(e_0, \delta))_j \in \{(e^-(e_0, \delta))_j, (e^+(e_0, \delta))_j\}$  pour  $j = 1, \dots, n$ .

Le sommet  $\chi$  étant défini à partir des solutions des systèmes (14) et (15) dont la dynamique n'est pas  $C^1$ , nous concluons que ces fonctions ne sont pas  $C^1$  en  $e_0$ . Toutefois, cette fonctions étant Lipschitz en tout point de  $\mathbb{R}^n$ , nous pouvons utiliser le gradient généralisé<sup>3</sup> introduit par Clarke [3].

Considérons alors les  $2^{n^2}$  matrices  $M_\ell(\delta)$  définies comme

$$(M_\ell)_{i,j}(\delta) \in \left\{ \begin{array}{cc} \min_{\theta_0 \in \mathcal{S}_n, m \in \frac{\partial_C \chi_i}{\partial e_j}(\theta_0, \delta)} m, & \max_{\theta_0 \in \mathcal{S}_n, m \in \frac{\partial_C \chi_i}{\partial e_j}(\theta_0, \delta)} m \end{array} \right\}$$

Remarquons tout d'abord que  $M_\ell(0) = I$ . Aussi, en utilisant la formule de Danskin (voir [3, p.99]) nous obtenons,

$$\frac{\partial (M_\ell)_{i,j}(\delta)}{\partial \delta} \in \left\{ \frac{\partial}{\partial \delta} \frac{\partial_C \chi_i}{\partial e_j}(\theta_0, \delta), \theta_0 \in \mathcal{S}_n \right\}.$$

3. Pour une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  localement Lipschitz à un point  $x$ , le gradient généralisé est défini par :

$$\frac{\partial_C f}{\partial x}(x) = \text{Conv} \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_i) : x_i \rightarrow x, x_i \notin \Omega \right\},$$

où  $\Omega$  est tout ensemble de mesure nulle.

Or, nous avons pour tout  $(\theta_0, \delta)$  dans  $\mathcal{S}_n \times \mathbb{R}_+$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \frac{\partial_C \chi_i}{\partial e_j}(\theta_0, \delta) \subseteq \frac{\partial_C}{\partial e_j} \frac{\partial \chi_i}{\partial \delta}(\theta_0, \delta).$$

Aussi, par définition pour tout  $(\theta_0, \delta)$  dans  $\mathcal{S}_n \times \mathbb{R}_+$ ,

$$\frac{\partial \chi_i}{\partial \delta}(\theta_0, \delta) \in \{\dot{e}_i^+(\theta_0, \delta), \dot{e}_i^-(\theta_0, \delta)\},$$

et par [3, Theorem 2.5], nous obtenons<sup>4</sup>

$$\frac{\partial_C \dot{e}_i^+}{\partial e_j}(\theta_0, \delta) \subseteq \overline{\text{Conv}}_{R \in \mathcal{R}} \left\{ (R\mu)_i, \mu \in \frac{\partial_C e^+}{\partial e_j}(\theta_0, \delta) \right\},$$

où  $\mathcal{R}$  est l'ensemble de matrices défini dans la Section II-B. Or nous avons  $\frac{\partial_C e^+}{\partial e_j}(\theta_0, \delta) = \{I_n\}$ , ainsi la relation précédente implique pour  $\delta = 0$ ,

$$\frac{\partial (M_\ell)_{i,j}}{\partial \delta}(0) \subseteq \text{Conv}_{R \in \mathcal{R}} \{(R)_{i,j}\}.$$

De ce fait, nous concluons que l'ensemble de fonctions matricielles  $M_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, 2^{n^2}$  satisfait la seconde partie du théorème 4. Il reste à démontrer que l'inclusion (12) est satisfaite. Pour ce faire, remarquons que pour tout  $\theta$  dans  $\mathcal{S}_n$  de part la définition des matrices  $M_\ell$ , l'inclusion suivante est obtenue :

$$\chi(\theta_0, \delta) \in \text{Conv}_{\ell=1, \dots, 2^{n^2}} \{M_\ell(\delta)\theta_0\}. \quad (16)$$

Aussi, les systèmes (14) et (15) étant homogènes de degrés 0, les solutions sont homogène de degrés 1. Ainsi, nous avons pour tout  $\lambda > 0$  et  $e_0 \in \mathbb{R}^n$  :

$$e^+(\lambda e_0, \delta) = \lambda e^+(e_0, \delta), \quad e^-(\lambda e_0, \delta) = \lambda e^-(e_0, \delta).$$

Par conséquent, nous obtenons  $\chi(e_0, \delta) = |e_0| \chi(\theta_0, \delta)$  où  $\theta_0 = \frac{e_0}{|e_0|} \in \mathcal{S}_n$ . Ainsi, en utilisant (16), nous obtenons pour tout  $e_0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et tout  $\delta > 0$  :

$$\begin{aligned} \chi(e_0, \delta) &\in |e_0| \text{Conv}_{\ell=1, \dots, 2^{n^2}} \{M_\ell(\delta)\theta_0\}, \\ &\in \text{Conv}_{\ell=1, \dots, 2^{n^2}} \{M_\ell(\delta)e_0\}. \end{aligned}$$

En réitérant cette procédure pour chacun des sommets du pavé, nous obtenons un ensemble de matrice  $M_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, N$  tel que pour tout  $e_0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et tout  $\delta > 0$  :

$$\mathcal{A}_\delta(e_0) \subseteq T(e_0, \delta) \subseteq \text{Conv}_{\ell=1, \dots, N} M_\ell(\delta)e_0.$$

### C. Démonstration de la proposition 2

La démonstration de cette proposition repose sur l'utilisation du principe de maximum de Pontriaguine. Considérons les  $2n$  problèmes de minimisations définis comme suit pour  $j = 1, \dots, n$

$$P_j^-(e_0, \delta) = \min_{v_i \in L_{\text{loc}}^\infty \forall i \in \{1, n\}} e_j(\delta),$$

et

$$P_j^+(e_0, \delta) = \min_{v_i \in L_{\text{loc}}^\infty \forall i \in \{1, n\}} -e_j(\delta),$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} e(\cdot) \text{ est solution de (10) telle que } e(0) = e_0, \\ |v_{n,i}| \leq c_{n,i}, \forall i \in \{1, n\}. \end{array} \right.$$

4.  $\overline{\text{Conv}}$  caractérise la fermeture convexe.

Nous remarquons que la solution de chacun de ces problèmes nous permet de trouver le minimum et maximum de chacune des composantes des solutions du système d'erreur (10). Si nous démontrons qu'il existe  $\delta_m > 0$  tel que pour tout  $\delta < \delta_m$  nous avons

$$P_j^-(e_0, \delta) = (e^-(\delta))_j, P_j^+(e_0, \delta) = (e^+(\delta))_j, j = 1, \dots, n, \quad (17)$$

alors la démonstration de la Proposition 2 en découlera.

La suite de la démonstration se consacre donc à la résolution des  $2n$  problèmes de contrôle optimal afin de démontrer l'existence d'un  $\delta_m$  tel que (17) est obtenue.

Remarquons que les problèmes  $P_j^-(e_0, \delta)$  et  $P_j^+(e_0, \delta)$  sont dit de Mayer (du fait qu'il n'y a pas de terme intégrale dans le coût). En utilisant le principe du Maximum de Pontryagin ([11]) il est possible de formuler des conditions nécessaires sur le contrôle minimisant. Pour exprimer ces conditions nécessaires, nous devons introduire le Hamiltonien du système (10) :

$$H(e, p, v) = \sum_{j=1}^{n-1} p_j e_{j+1} + p_n \sum_{j=1}^n e_j v_{n,j},$$

où  $p(\cdot) : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application absolument continue appelée vecteur adjoint.

*Théorème 5 (PMP)* Pour  $j = 1, \dots, n$ , si  $t \in [0, \delta] \mapsto (e(t), v(t))$  est une extrémale associée au problème de minimisation  $P_j^-(e_0, \delta)$  (Resp.  $P_j^+(e_0, \delta)$ ), alors il existe une fonction  $t \mapsto p(t)$  absolument continue telle que les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

1. nous devons avoir pour tout  $t$  dans  $[0, \delta]$

$$\dot{p}_1 = -p_n v_{n,1}, \dot{p}_j = -p_{j-1} - p_n v_{n,j}, j = 2, \dots, n; \quad (18)$$

2. la condition de maximisation suivante est satisfaite pour presque tout  $t$  dans  $[0, \delta]$

$$H(e(t), p(t), v(t)) = H^*(t) \quad (19)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} p_j(t) e_{j+1}(t) + |p_n| \sum_{j=1}^n |e_j| c_{n,j};$$

3. la condition de transversalité suivante est satisfaite :

$$p_j(\delta) = 1, \text{ (Resp. } p_j(\delta) = -1), p_\ell(\delta) = 0, \forall \ell \neq j. \quad (20)$$

Notons que puisque le vecteur adjoint  $p$  doit être non trivial,  $p_n(\cdot)$  ne peut s'annuler sur un intervalle. En effet, dans ce cas en exploitant (18) nous aurions également  $p_{n-1}(t) = -\dot{p}_n(t) = 0$  pour tout  $t$  dans cet intervalle. Et donc itérativement  $p(\cdot) = 0$  sur cet intervalle.

De même, pour  $j = 1, \dots, n$ ,  $e_j(\cdot)$  ne peut s'annuler sur un intervalle. En effet dans ce cas, en exploitant (10) nous aurions également  $e_{j+1}(t) = \dot{e}_j(t) = 0$  pour tout  $t$  dans cet intervalle et donc itérativement  $e_\ell(\cdot) = 0, \ell = j, \dots, n$ . Si  $j \geq 2$ , nous avons de plus  $e_1^{(j)}(\cdot) = 0$  et donc  $e_1, \dots, e_{j-1}$  sont des polynômes respectivement de degré  $j-2, \dots, 0$ . D'un autre côté, sur cet intervalle nous avons aussi  $\dot{e}_n(t) = \sum_{\ell=1}^{j-1} v_{n,\ell}(t) e_\ell(t) = 0$ . Ainsi, avec (19) nous obtenons pour presque tout  $t$  dans cet intervalle

$$p_n(t) \sum_{\ell=1}^{j-1} e_\ell(t) v_{n,\ell}(t) = |p_n(t)| \sum_{\ell=1}^{j-1} c_{n,\ell} |e_\ell(t)| = 0.$$

Or,  $p_n$  ne pouvant s'annuler sur un intervalle,  $e_j$  étant des polynômes de degrés différents, nous concluons que  $e_1 = \dots = e_{j-1} = 0$  et donc  $e(t) = 0$ . L'origine étant un équilibre du système (10), il est impossible que cette solution soit une extrémale. Nous en déduisons donc que  $p_n(\cdot) e_j(\cdot), j = 1, \dots, n$  ne peut s'annuler sur un intervalle. Ceci implique que pour presque tout  $t$  dans  $\mathbb{R}_+$

$$v_{n,j}(t) = \text{Signe}(p_n(t) e_j(t)). \quad (21)$$

En exploitant la condition de transversalité nous pouvons maintenant démontrer que  $p_n(t)$  ne change pas de signe pour  $t$  suffisamment petit.

En effet, considérons le  $j$ ème problème de minimisation  $P_j^-(e_0, \delta)$  avec  $j \neq n$ , nous avons le Lemme suivant, démontrée dans l'appendice.

*Lemme 1* : Il existe un temps  $\delta_1$  positif et un coefficient positif  $d$  tel que  $|p_n(\delta - t)| < d t^{n-j}$  pour tout  $t$  dans  $[0, \delta_1]$  et pour tout  $\delta > 0$ .

Ainsi, avec (18) et le fait que  $|v_{n,1}(t)| \leq c_{n,1}$  nous avons,

$$|\dot{p}_1(\delta - t)| \leq c_{n,1} d t^{n-j}, \forall t \in [0, \delta_1].$$

Et donc en intégrant cette inégalité, nous obtenons

$$|p_1(\delta - t)| \leq \frac{c_{n,1} d}{n-j+1} t^{n-j+1} + |p_1(\delta)|, \forall t \in [0, \delta_1].$$

En intégrant successivement cette inégalité, puis en utilisant les conditions de transversalité (20), ceci donne l'existence d'un nombre positif  $d_{j-1}$  tel que :

$$|p_{j-1}(\delta - t)| \leq d_{j-1} t^{n-j+1}, \forall t \in [0, \delta_1]. \quad (22)$$

D'un autre côté, nous avons l'inégalité suivante pour tout  $t$  dans  $[0, \delta_1]$  :

$$p_j(\delta - t) \geq p_j(\delta) - \int_0^t |p_{j-1}(\delta - s)| + c_j |p_n(\delta - s)| ds.$$

Avec (20) et (22) nous obtenons donc pour tout  $t$  dans  $[0, \delta_1]$  :

$$p_j(\delta - t) \geq 1 - d_{j-1}(\delta - t)^{n-j+2} - c_j d t^{n-j},$$

$$\geq 1 - d_j t^{n-j},$$

où  $d_j$  est un réel positif. En intégrant l'inégalité précédente, nous obtenons pour tout  $t$  dans  $[0, \delta_1]$  :

$$p_{j+1}(\delta - t) \geq t - d_j t^{n-j+1} - c_{j+1} d t^{n-j},$$

$$\geq t - d_{j+1} t^{n-j},$$

où  $d_{j+1}$  est un réel positif. En procédant de la même façon successivement, nous obtenons un réel positif  $d_{n-1}$  tel que

$$p_{n-1}(\delta - t) \geq t^{n-j-1} - d_{n-1} t^{n-j}.$$

En comparant les degrés des deux monômes de la dernière équation, nous obtenons l'existence d'un temps  $\delta_2$  dans  $[0, \delta_1]$  tel que

$$p_{n-1}(\delta - t) > 0, \forall t \in [0, \delta_2].$$

Finalement, nous avons  $\dot{p}_n \geq v_n p_n + p_{n-1}$  et  $p_n(\delta) = 0$ . Nous obtenons donc pour tout  $t$  dans  $[0, \delta_2]$ ,

$$p_n(\delta - t) = \int_\delta^{\delta-t} \exp\left(\int_s^{\delta-t} v_n(w) dw\right) p_{n-1}(s) ds > 0.$$

En procédant de la même façon, il est possible de démontrer qu'il existe un temps suffisamment petit noté  $\delta_m$  au cours duquel  $p_n(\delta - t)$  pour tout  $t$  dans  $[0, \delta_m]$  est

- positif lorsque l'on considère le problème de minimisation  $P_j^-(e_0, \delta)$ ,  $j = 1, \dots, n$  ;
- négatif lorsque l'on considère le problème de minimisation  $P_j^+(e_0, \delta)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

En utilisant la forme du contrôle minimisant donné dans (21), nous concluons que finalement, si  $\delta < \delta_m$ , nous obtenons dans le cas du problème de minimisation  $P_j^-$  (Resp.  $P_j^+$ ) :

$$v_{n,j}(t) = |e_j(t)| \quad \left( \text{Resp. } v_{n,j}(t) = -|e_j(t)| \right) .$$

Ainsi, l'équation (17) est obtenue. La démonstration de la Proposition (2) est donc terminée.

#### IV. CAS DU PENDULE PESANT

Considérons le modèle d'un pendule pesant qui peut se mettre sous la forme

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \sin(x_1),$$

avec

$$y_k = x_1(t_k), \quad t_k = t_{k-1} + \delta .$$

Le système d'erreur associé à cet exemple est simplement :

$$\dot{e}_1 = e_2, \quad \dot{e}_2 = v_1 e_1,$$

avec la borne  $|v_1| \leq 1$ . En suivant l'approche développée dans les sections précédentes, nous obtenons tout d'abord que l'approximation par le pavé noté  $T(e_0, \delta)$  est valide pour  $\delta_m = \sqrt{3} - 1$ . En intégrant les solutions des systèmes (14) et (15), nous obtenons 64 fonctions matricielles  $M_i$  satisfaisant les hypothèse du Théorème 4.

$$M_i(\delta) = \begin{bmatrix} \lambda_i & \nu_i \\ \kappa_i & \tau_i \end{bmatrix}$$

où

$$\lambda_i \in \{\cos \delta, \cosh \delta\}$$

$$\nu_i \in \{\sin \delta, \sinh \delta, \cosh \delta \tan \delta, \tanh \delta \cos \delta\}$$

$$\kappa_i \in \{-\sin \delta, \sinh \delta\}$$

$$\tau_i \in \left\{ \cos \delta, \cosh \delta, \frac{1}{\cos \delta} + \sinh \delta \tan \delta, \frac{1}{\cosh \delta} + \sin \delta \tanh \delta \right\}$$

Remarquons qu'en considérant le minimum et le maximum de chacune des composantes, nous pouvons réduire le nombre de matrices à 16.

En utilisant le programme *Yalmip* ([7]) sous *Matlab* en combinaison avec l'algorithme de résolution *Sedumi* ([10]), il peut être testé que l'inégalité matricielle (13) est satisfaite pour  $\delta \leq 0.668$ . Le gain de l'observateur dans le cas où  $\delta = 0.668$  est  $K = [-1, -1.8361]'$ .

Dans la figure 1 est représentée une simulation de l'observateur en utilisant un algorithme d'intégration du modèle semi-implicite avec un pas d'intégration à 0.01.

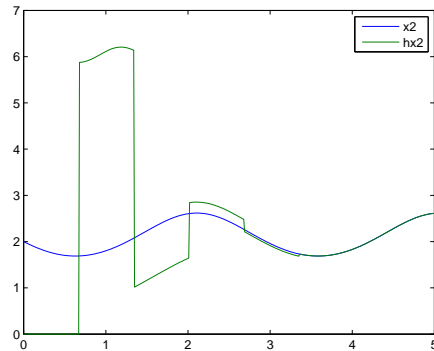


Fig. 1. Évolution du vecteur  $x_2$  ainsi que de son estimation.

#### V. CONCLUSION

Dans cet article nous avons étendu la méthode de synthèse d'un observateur continu discret introduit dans [2] dans le cas des système uniformément observable. En exploitant une approximation par pavé multidimensionnel de l'ensemble atteignable pour le système d'erreur nous avons montré que cette approche pouvait s'appliquer dans le cas de pas d'échantillonnage de la mesure suffisamment petits.

#### RÉFÉRENCES

- [1] T. Ahmed Ali, R. Postoyan, and F. Lamnabhi-Lagarrigue. Continuous discrete adaptive observers for state affine systems. *Automatica*, 45(12).
- [2] V. Andrieu and M. Nadri. Observer design for lipschitz systems with discrete-time measurements. In *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*, pages 6522–6527. IEEE.
- [3] F.H. Clarke. *Nonsmooth analysis and control theory*, volume 178. Springer Verlag, 1998.
- [4] F. Deza, E. Busvelle, JP Gauthier, and D. Rakotopara. High gain estimation for nonlinear systems. *Systems & control letters*, 18(4) :295–299, 1992.
- [5] J. P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6) :875–880, 1992.
- [6] A.H. Jazwinski. *Stochastic processes and filtering theory*. Mathematics in Science and Engineering, 1970.
- [7] J. Löfberg. Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proc. of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, 2004. <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>.
- [8] M. Nadri and H. Hammouri. Constant gain observer for continuous-discrete time uniformly observable systems. *To appear in IEEE Transactions on Automatic Control, year=2010*.
- [9] M. Nadri, H. Hammouri, and C. Astorga. Observer design for continuous discrete-time state affine systems up to output injection. *European Journal of Control*, 10(3) :252–262, 2004.
- [10] J.F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11-12 :625–653, 1999. <http://sedumi.mcmaster.ca/>.
- [11] E. Trélat. *Contrôle optimal*. 2005.
- [12] A. Zemouche, M. Boutayeb, and G.I. Bara. Observers for a class of Lipschitz systems with extension to H8 performance analysis. *Systems & Control Letters*, 57(1) :18–27, 2008.

#### APPENDIX

##### I. PREUVE DU LEMME 1

Remarquons tout d'abord que du fait de la condition de transversalité, nous avons  $p_n(\delta) = 0$ . L'application  $t \mapsto p_n(t)$  étant continue, pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un temps  $\delta_1$  tel que  $|p_n(\delta - t)| < \epsilon$  pour tout  $t$  dans  $[0, \delta_1]$ .

Supposons maintenant qu'il existe  $r : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction  $C^\infty$  telle que pour tout  $t$  dans  $[0, \delta_1]$  avec

$$|p_n(\delta - t)| \leq r(t) . \quad (23)$$

Supposons de plus qu'il existe un entier positif  $k_r$  tel que<sup>5</sup>

$$r^{(\ell)}(0) = 0 , \ell = 0, \dots, k_r - 1 , r^{(k_r)}(0) > 0 .$$

Ainsi, avec (18) et le fait que  $|v_{n,1}(t)| \leq c_{n,1}$  nous avons  $|\dot{p}_1| \leq c_{n,1}|p_n|$  et donc nous obtenons pour tout  $t$  dans  $[0, \delta_1]$

$$\begin{aligned} |p_1(\delta - t)| &\leq c_{n,1} \int_0^t |p_n(\delta - s)| ds + |p_1(\delta)| , \\ &\leq c_{n,1} r_1(t) + |p_1(\delta)| , \end{aligned}$$

où

$$r_1(t) = \int_0^t r(s) ds .$$

De la même façon, nous avons  $|\dot{p}_2| \leq |p_1| + c_{n,2}|p_n|$  et donc nous obtenons,

$$|p_2(\delta - t)| \leq c_{n,1} r_2(t) + |p_1(\delta)| t + c_{n,2} r_1(t) + |p_2(\delta)| , \forall t \in [0, \delta_1] ,$$

où

$$r_2(t) = \int_0^t r_1(s) ds .$$

Puis, en intégrant successivement le long des trajectoires du système nous obtenons l'inégalité pour tout  $t$  dans  $[0, \delta_1]$

$$|p_{n-1}(\delta - t)| \leq \sum_{\ell=1}^{n-1} c_{n,\ell} r_{n-\ell}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} |p_k(\delta)| \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!} ,$$

où les fonctions  $r_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, n-1$  sont définie par la récurrence suivante :

$$r_\ell(t) = \int_0^t r_{\ell-1}(s) ds , \ell = 1, \dots, n .$$

En exploitant les conditions de transversalité (20), cette inégalité devient :

$$|p_{n-1}(\delta - t)| \leq \sum_{\ell=1}^{n-1} c_{n,\ell} r_{n-\ell}(t) + \frac{t^{n-j-1}}{(n-j-1)!} , \forall t \in [0, \delta_1] ,$$

Et par conséquent, en utilisant le lemme de Gronwall, ceci nous donne pour la dernière composante et pour tout  $t$  dans  $[0, \delta_1]$  :

$$\begin{aligned} |p_n(\delta - t)| &\leq \int_{\delta-t}^{\delta} \exp(c_{n,n}[s + t - \delta]) |p_{n-1}(s)| ds , \\ &\leq s(t) , \end{aligned} \quad (24)$$

où  $s : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction  $C^\infty$  définie par

$$s(t) = \exp(c_{n,n}\delta_1) \left[ \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{c_\ell}{c_{n,n}} r_{n-\ell+1}(t) + \frac{t^{n-j}}{c_{n,n}(n-j)!} \right] .$$

Remarquons que  $s$  satisfait

$$s^{(\ell)}(\delta) = 0 , \ell = 0, \dots, k_s - 1 , s^{(k_s)}(\delta) > 0 ,$$

5. pour une fonction  $C^\infty r : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  nous notons  $r^{(k)}(t)$  sa  $k$ -ème dérivée évaluée en  $t$  avec la convention  $r^{(0)}(t) = r(t)$ .

$$k_s = \min\{k_r + 2, n - j\} .$$

En recommençant itérativement la procédure avec la fonction  $s$  à la place de la fonction  $r$ , nous obtenons donc que finalement, il existe une fonction  $r : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $C^\infty$ , tels que pour tout  $t$  dans  $[0, \delta_1]$

$$|p_n(\delta - t)| \leq r(t) , \quad (25)$$

$$r^{(\ell)}(0) = 0 , \ell = 0, \dots, n - j - 1 , r^{(n-j)}(0) > 0 .$$

Ceci conclut la démonstration du Lemme.