HABILITATION À DIRIGER LES RECHERCHES EN SCIENCES

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER II

Spécialité

MATHÉMATIQUES

par

Frédéric MAZENC

Sujet du mémoire :

ANALYSE DE STABILITÉ ET COMMANDE DE SYSTÈMES NON LINÉAIRES

Soutenue le 12 février devant le jury composé de :

MM.	**Pierre**	**Bernhard**	Président
	Jean-Michel	**Coron**	Rapporteur
	Jérôme	**Droniou**	Examinateur
	Jean-Luc	**Gouzé**	Rapporteur
	Laurent	**Praly**	Examinateur
	Eduardo	**Sontag**	Rapporteur

Remerciements

Les occasions de remercier publiquement ceux auxquels on est redevable sont rares, trop rares au gout de ceux qui, comme moi, tout en ayant à coeur d'en adresser de profonds, ne parviennent pas toujours aisément à trouver les mots justes pour les formuler de vive voix. Aussi suis je heureux que mon habilitation à diriger des recherches m'en fournisse une.

Je tiens tout d'abord à dire à Claude Lobry, Alain Rapaport et Jérôme Harmand combien ils m'ont été, chacun à leur manière, bénéfiques. Ils m'ont tant apporté sur les plans scientifique, matériel et amical qu'il n'est pas exagéré de dire qu'ils ont radicalement transformé ma vie.

Je remercie profondément Pierre Bernhard d'avoir accepté d'être le président de mon jury d'habilitation. Il m'a fait là un honneur auquel je suis des plus sensible.

Je remercie profondément Eduardo Sontag qui, depuis bien des années, m'a soutenu par des aides dont le désintéressement saute aux yeux. Je lui dois notament d'avoir fait connaissance avec un chercheur aux mérites exceptionnels, Michael Malisoff.

Je remercie profondément Jean-Luc Gouzé. Lui également me fut bénéfique de bien des manières et ce durant des années : je songe en particuler à la gentillesse avec laquelle il m'acqueilli fréquement au sein du projet COMORE, alors que je n'étais pas encore membre de l'unité de recherche de Sophia-Antipolis. Je remercie également Olivier Bernard pour de semblables raisons.

Je remercie profondément Jean-Michel Coron, et ce pour les mêmes raisons que celles que j'ai exprimé, il y a 10 ans, dans mes remerciements de thèse : c'est dire combien celles-ci sont solides et combien Jean-Michel Coron est peu semblable aux être changeants qui soufflent, au grès de leur caprices ou de leur intérêts, le chaud et le froid.

Je remercie profondément Laurent Praly, sans lequel je n'aurais tout simplement pas été chercheur et qui, depuis la fin de ma thèse, me donne de précieux conseils qui m'éclairent, me guident, ainsi que son exemple que j'ai fréquement à l'esprit.

Je remercie Jérôme Droniou, qui bien que nous ne nous connaissions que depuis peu, m'a rendu de forts gentils services et donné de bien belles leçons sur la théorie du degré.

Je remercie Jean-Pierre Vila pour l'exellent acceuil qu'il me fit lors de mon arrivée au LASB et pour les aides grandes et petites qu'il n'a cessé de m'apporter par la suite.

Table des matières

Première partie

Présentation de l'activité scientifique

Chapitre 1

Synthèse des travaux

1.1 Introduction

L'ensemble de mes travaux de recherche menés, à la suite de mon doctorat effectué au CAS (Ecole des Mines de Paris), au sein successivement du CESAME (Université Catholique de Louvain), du Centre for Process System Engineering (Imperial College), du projet CONGÉ de l'INRIA Lorraine puis du projet MERE de l'INRIA Sophia-Antipolis, se présente sous deux volets :

- un volet recherche théorique portant sur l'analyse de la stabilité et la commande de systèmes non linéaires autonomes, de systèmes non linéaires variant dans le temps, de systèmes non linéaires à retard.
- un volet applicatif au service de collègues de disciplines diverses (mécanique, écologie,...).

Parmi les différentes questions rencontrées au cours de mon parcours scientifique, j'ai pu identifier un besoin de développer des outils méthodologiques permettant d'appréhender ou de mieux appréhender le problème de l'analyse de la stabilité ou de la commande de systèmes non linéaires. Ceci m'a conduit en particulier à réaliser des constructions de fonctions de Lyapunov et ce pour des systèmes autonomes et sans retard mais également pour des systèmes variant dans le temps ou à retard. A ma grande surprise, l'approche Lyapunov était assez peu employée pour ces deux dernières familles de systèmes.

Ces thèmes de recherche m'ont également permis de co-encadrer deux doctorants, qui ont préparé leurs thèses au sein de l'INRIA Lorraine et du CINVESTAV de l' Institut Polytechnique National (Mexique) :

- Samuel Bowong : "Contribution à la stabilisation et stabilité des systèmes non linéaires : Applications à des systèmes mécaniques et épidémiologiques ", docteur de l'Université de Metz, 27 Janvier 2003. Jury : Brigitte d'Andrea Novel, Tewfik Sari, Rodolphe Sepulchre (rapporteurs) David Békollé, Bitjong Ndombol, Gauthier Sallet (Examinateurs).
- Rogelio Francisco Antonio : "Contribución al Estudio de Sistema No Lineasles con Retardo", docteur du Centro de Investigación Y De Estudios Avanzados Del IPN, Décembre 2004. (Jury : Sabine Mondié Cuzange, Eduardo Aranda, Moises Bonilla, Ruben Garrido, Antonio Osorio, Gerardo Silva).

et une stagiaire du Master 2, Mathématiques et interactions :

- Hilde Ouvrard, " Analyse de la stabilité de 2 modèles de chemostat ", Montpellier II, 2006.

1.2 Prix, responsabilités collectives

• Obtention du prix "*2006 Transactions on Control Systems Technology Best Paper Award*" pour l'article : K. Pettersen, F. Mazenc, H. Nijmeijer. *Global Uniform Asymptotic Stabilization of an Underactuated Surface Vessel : Experimental Results.* IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 12, No. 6, pp. 891-903, Nov. 2004.

• Obtention par Michael Malisoff du prix "ACC06 Best Presentation Award in session" pour sa présentation de l'article : Mazenc, F., M. Malisoff, and M. de Queiroz, *On strict Lyapunov functions for rapidly time-varying nonlinear systems,* American Control Conference (Minneapolis, MN, 14-16 June 2006), pp. 2303-2308.

• Responsable permanent du projet MERE de l'unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis.

• Membre du projet " *Research in Nonlinear Control Systems Theory : Lyapunov Functions, Stabilization, and Engineering Applications.* " NSF Standard Grant 0424011 Thème : mathématiques appliquées. *Program Officer :* John Shaw. Membres : Michael Malisoff, Marcio de Queiroz, Feng Gao, Mikhail Krichman, Eduardo Sontag.

• Membre du PICS CNRS/NSF No 1738, titre : Analyse, conception assistée par ordinateur et applications, durée 3 ans, financement 15000 euros.

• Membre du programme du comité international chargé de l'organisation du quatrième IFAC workshop on Time-Delay Systems TDS03 Rocquencourt, France, 2003 et du sixième IFAC workshop on Time-Delay Systems TDS06 (2006, L'Aquila, Italie).

• Membre du comité d'organisation du colloque " commande des systèmes non linéaires " (19-21 Juin 2002), coorganisé par la laboratoire MMAS de l'université de Metz et le projet CONGÉ de l'INRIA Lorraine. Coorganisateurs : Ph. Adda, R. Chabour, E. Richard, J.C. Vivalda.

• Participation à des comités de lecture pour les revues *IEEE Trans. Aut. Contr., Automatica, Systems & Control Letters, European Journal of Control, International Journal of Control, Mathematics of Control, Signals and Systems, SIAM Journal on Control and Optimization, International Journal of Robust and Nonlinear Control, Journal of Applied Mathematics.*

• *Chairman* au cours de diverses conférences (CDC, ECC, Nonlinear Control Network).

• Rapporteur de la thèse de Khoi B Ngo, élève de R. Mahony, *Associate Professor* de la *Faculty of Engineering and Information Technology* de l'*Australian National University (2006).*

• Participation en tant qu'invité au jury de la soutenance de thèse de Tarek Ahmed-Ali, thèse de l'université Paris-Sud soutenue au LSS, CNRS, le 26 Octobre 1998.

1.3 Enseignement

• Novembre 2006. Enseignement (6 heures) effectuées au Centre de Modélisation Mathématique de l'Université du Chili.

• Juillet 2006. Enseignement (6 heures) effectuées à Tunis au Laboratoire de Modélisation Mathématique et Numérique dans les Sciences de l'Ingénieur, laboratoire associé INRIA et AIRE développement.

• 1999/2000 T.D. de mathématiques effectués à l'université de Metz, Institut Supérieur Franco-Allemand de Techniques et d'Economie (13 heures).

• 1997/1999 T.D. de mathématiques effectués à l'Imperial College (10 heures).

• 1996/1997 T.D. de mathématiques effectués à l'université catholique de Louvain (18 heures).

- 1995/1996 T.D. de mathématiques Université Paris IX (Panthéon ASSAS, France) (40 heures).

1.4 Liste des co-auteurs

T. Ahmed-Ali (LSS, CNRS),
A. Astolfi (Imperial College, Grande Bretagne),
A. Annaswamy (MIT, USA),
P.A. Bliman (INRIA Rocquencourt),
S. Bowong (INRIA Lorraine),
F. Chatté (Heudiasyc, CNRS),
W.P. Dayawansa (Texas Tech University, USA),
M.S. de Queiroz (Université de Baton Rouge, USA),
I. Fantoni (Heudiasyc, CNRS),
R. Francisco (CINVESTAV, Mexique),
F. Gao (Université de Baton Rouge, USA),
F. Grognard (INRIA Sophia-Antipolis),
K. Gu (Southern Illinois University, USA),
J. Harmand (Projet MERE, INRA),
A. Iggidr (INRIA Lorraine),
M. Jankovic (Ford Scientific Research Laboratories, USA),
M-C. Laiou (Imperial College, Grande Bretagne),
F. Lamnabhi-Lagarrigue (LSS, CNRS),
P. De Leenheer (Department of Mathematics, University of Florida)
Z. Lin (Charles L. Brown Department of Electrical and Computer Engineering, University of Virginia)
C. Lobry (Projet MERE, Université de Nice),
R. Lozano (Heudiasyc, CNRS),
T. Luzyanina (Katholieke Universiteit Leuven, Belgique),
M. Mabrouk (INRIA Lorraine),
R. Mahony (The Australian National University, Australie),
M. Malissoff (Université de Baton Rouge, USA),
D. Melchor-Aguillar (IPICyT, Mexique),
W. Michiels (Katholieke Universiteit Leuven, Belgique),
S. Mondié (CINVESTAV, Mexique),
D. Nesic (University of Melbourne, Australie),
S. Niculescu (Heudiasyc, CNRS),
H. Nijmeijer (Eindhoven University of Tech., Pays Bas),
K. Pettersen (Norwegian University of Science and Tech., Norvège),
L. Praly (CAS, Ecole des Mines de Paris),
C. Prieur (LAAS, CNRS),
A. Rapaport (Projet MERE, INRA),
E. Richard (INRIA Lorraine),
R. Sepulchre (Université de Liège, Belgique),
J.C. Vivalda (INRIA Lorraine).

1.5 Activités de recherche présentées dans ce mémoire

J'ai choisi d'exposer en premier lieu certains de mes résultats de recherche théorique (Partie II), avant de développer certains des travaux appliqués que j'ai effectués au moyen des résultats théoriques précédemment exposés (Partie III).

J'ai choisi de ne présenter qu'une partie de mes résultats tant théoriques qu'applicatifs et ce pour deux raisons principales.

1) Il m'a paru souhaitable de réaliser un document ne contenant aucune répétition inutile des travaux que j'ai effectués au cours de la préparation de mon doctorat.

2) Exposer exhaustivement mes travaux m'aurait conduit à réaliser un document d'une longueur excessive ou à ne présenter des résultats que de façon très incomplète.

J'ai donc sélectionné certains de mes travaux effectués après mon doctorat et ce en fonction de leur représentativité de l'ensemble de mes recherches. Les travaux que je présenterai ont pour caractéristiques d'être constructifs et de montrer que, dans de nombreux cas, des résultats relatifs aux systèmes dynamiques obtenus par des approches non constructives peuvent être transformés en des résultats constructifs. Ces derniers pour avantage d'offrir des outils mathématiques utilisables dans la pratique et permettant de quantifier les comportements des systèmes : de façon imagée, on peut dire qu'un résultat constructif ne dit pas seulement "tel système se comporte ainsi", mais "tel système se comporte ainsi avec au moins autant de force que cela", ou encore "telle famille de systèmes se comporte ainsi". Une autre des caractéristiques de bon nombre de mes travaux est qu'ils franchissent les barrières qui se trouvent entre les divers types de systèmes que j'ai étudié. Alors que les systèmes autonomes sans retard, les systèmes à retards, les systèmes variant dans le temps sont souvent considérés à part les uns des autres et traités par des techniques spécifiques à leurs familles, j'ai montré à plusieurs reprises qu'une technique faite pour les uns peut souvent être adaptée aux autres.

Les références entre crochets [ ] reportent à la liste des travaux donnée au Chapitre 2.

1.5.1 Systèmes non linéaires autonomes

Dans le Chapitre 4, je présenterai tout d'abord un résultat de stabilisation asymptotique globale par retour dynamique de sortie pour une famille de systèmes *feedforward* ayant pour sortie des composantes de la variable d'état, [24].

Dans un deuxième temps, je présenterai une technique permettant de construire des fonctions de Lyapunov strictes pour des systèmes non linéaires très généraux vérifiant une hypothèse de stabilité exprimée en terme de fonction de Lyapunov non stricte et une hypothèse d'asymptotique stabilité s'exprimant en terme de dérivées de Lie, [17].

1.5.2 Systèmes non linéaires à retard

Dans le Chapitre 5, je présenterai tout d'abord divers résultats de stabilisation asymptotique globale pour un système dit 'oscillateur', ayant une commande bornée dans laquelle est présent un retard ponctuel arbitrairement grand, [14], [40].

Dans un deuxième temps, je présenterai une technique permettant de déterminer des lois de commande stabilisant globalement asymptotiquement des systèmes *feedforward* non linéaires ayant un retard dans l'entrée ponctuel arbitrairement grand, [18].

Dans un troisième temps, je présenterai une adaptation de la technique d'ajout d'intégrateurs au problème de l'obtention des lois de commandes globalement asymptotiquement stabilisante pour des systèmes non linéaires ayant un retard ponctuel arbitrairement grand dans l'entrée, [11].

1.5.3 Systèmes non linéaires variant dans le temps

Je commencerai le Chapitre 6 en présentant le résultat central que j'ai obtenu sur le sujet, celui de la construction de fonctions de Lyapunov strictes pour des systèmes non linéaires non autonomes pour lesquels sont connues des fonctions de Lyapunov non strictes, [21].

Dans un deuxième temps, j'établirai un résultat de construction de lois de commande dépendante du temps non linéaires utilisant le résultat précédent. Plus précisement, j'étendrai la technique d'ajout d'intégrateur au cas de systèmes non linéaires non autonomes pour lesquels des lois de commande bornées sont désirées [16].

1.5.4 Travaux appliqués : Systèmes non linéaires

Dans le Chapitre 7, je montrerai de quelle manière le résultat de stabilisation par retour de sortie pour les systèmes *feedforward* présenté au Chapitre 4 permet de résoudre le problème de la stabilisation asymptotique globale du système dit 'pendule-chariot', avec pour variable de sortie les variables de position, [24].

1.5.5 Travaux appliqués : Systèmes non linéaires à retard

Dans le Chapitre 8, je montrerai de quelle façon peut être construite pour un modèle de congestion de type TCP une fonctionnelle de Lyapunov stricte, lorsqu'est présent dans les équations un retard ponctuel donné suffisamment petit. Ce résultat montre de quelle façon une fonctionnelle de Lyapunov peut servir à obtenir une valeur garantissant que pour tout retard de taille inférieure à celle-ci, le système est globalement asymptotiquement stable, [68], [39].

1.5.6 Travaux appliqués : Systèmes non linéaires variant dans le temps

Dans le Chapitre 9, j'illustrerai dans un premier temps au moyen d'un modèle de bateau l'utilité du résultat théorique de construction de fonctions de Lyapunov strictes pour des systèmes variant dans le temps présenté dans ce mémoire au Chapitre 6. Ce système est un système non holonome ne vérifiant pas les conditions nécessaire de stabilité du théorème de Brockett. Pour ce modèle, des lois de commande stabilisantes dépendantes du temps de façon périodique sont construites en appliquant la technique de l'ajout d'intégrateur, ce qui peut être effectué grâce à la construction de fonctions de Lyapunov strictes que nous venons d'évoquer, [21], [15].

Pour finir, je présenterai au Chapitre 10 un résultat de suivi de trajectoires, pour un modèle de chémostat, qui illustre de quelle façon la connaissance des systèmes non linéaires non autonomes peut être employée pour résoudre des questions relatives à la régulation de bio-réacteurs ou chémostats, [8].

1.6 Travaux non présentés dans ce mémoire

La liste non exhaustive des travaux effectués depuis mon travail de thèse et que je n'ai pas présentés dans ce mémoire est la suivante :

1) Stabilisation asymptotique globale de systèmes *feedforward* approximés à l'origine par une chaîne d'intégrateurs homogène de longueur arbitraire au moyen de lois de commande bornées, [34].

2) Stabilisation asymptotique globale de systèmes *feedforward* temps discret et stabilisation optimale inverse de systèmes *feedforward* temps discret [32], [42].

3) Constructions locales de fonctions de Lyapunov pour des systèmes dont la propriété de stabilité asymptotique locale peut être montrée au moyen du théorème de la variété centrale, [41]. Constructions locales de fonctions de Lyapunov et de lois de commande stabilisantes pour des systèmes en cascade instables à commande nulle [33].

4) Suivi de trajectoire pour des systèmes *feedforward*, construction de fonctions de Lyapunov strictes pour les équations d'erreur correspondantes, application au système pendule-chariot [30], [25], [20].

5) Stabilisation asymptotique globale de systèmes *feedforward* pour lesquels se produit le phénomène d'explosion en temps fini lorsque la commande est nulle, [31].

6) Constructions de fonctions de Lyapunov strictes pour des systèmes *feedforward* et mise en évidence de propriétés d'atténuation de perturbation, [82].

7) Stabilisation robuste par retour de sortie d'un corps rigide au moyen de commandes non autonomes, [29].

8) Extension de la technique d'ajout d'intégrateurs au problème de la construction de lois de commande saturées pour des systèmes autonomes, [19].

9) Stabilisation de systèmes hydrauliques au moyen d'une technique reposant sur la propriété de passivité possédée par ces systèmes, [26].

10) Stabilisation au moyen de lois de commande bornées d'une chaîne d'intégrateur arbitrairement grande ayant un retard arbitrairement grand dans l'entrée, [22].

11) Mise en évidence de propriété de robustesse de type ISS pour certains systèmes non linéaires dépendant du temps, [12].

12) Nouvel outil de type Lyapunov permettant de vérifier qu'un système à retard non linéaire est globalement asymptotiquement stable, [27].

13) Diverses mises en évidence de propriétés de persistance de micro-organismes pour diverses familles de modèles écologiques, [2], [5], [9], [37], [61].

14) Construction de fonctions de Lyapunov strictes pour des systèmes non linéaires, non autonomes, sans commande, lorsque sont vérifiées les conditions suffisante de stabilité asymptotique uniforme globale du théorème de Mastrosov, [54], [93].

15) Construction de fonctions de Lyapunov et de lois de commande globalement stabilisantes pour des systèmes non linéaires vérifiant des conditions de stabilisabilité de type Jurdjevic-Quinn [10].

16) Mise en évidence de propriétés de stabilité et de robustesse de type ISS pour des systèmes variant dans le temps ayant deux échelles de temps, dont une rapide [6].

17) Mise en évidence de propriétés de stabilité et de robustesse de type ISS pour des systèmes variant dans le temps ayant deux échelles de temps, dont une lente. (Ce dernier sujet et le précédent ne sont identiques qu'en apparence) [47], [1].

18) Construction de fonctions de Lyapunov pour des familles générales de systèmes hybrides variant dans le temps [46], [49], [3].

19) Diverses applications : Stabilisation du système PVTOL (*plane with vertical take off and landing*) ayant un retard dans l'entrée arbitrairement grand [60], [38]. Stabilisation d'un modèle d'hélicoptère [69]. Stabilisation du système *Ball and Beam*, [88]. Stabilisation de systèmes non holonomes en forme chainée, [87]. Stabilisation par retour de sortie de systèmes mécaniques, [62]. Commande d'une bille magnétique au moyen d'une commande saturée, [7]. Construction d'une fonction de Lyapunov polytopique pour un modèle écologique admettant un point d'équilibre positif globalement asymptotiquement stable, [4], [56].

1.7 Conclusion

En résumé, mes travaux de recherche ont porté sur l'analyse de stabilité et la commande d'essentiellement trois grands types de systèmes : les systèmes non linéaires autonomes et sans retard, les systèmes non linéaires ayant un ou plusieurs retards et les systèmes variant dans le temps, systèmes qui résultent fréquemment du problème essentiel qu'est celui du suivi de trajectoires. J'ai utilisé ces travaux pour les appliquer à divers systèmes, des systèmes mécaniques et des modèles écologiques en particulier. J'ai mené ces travaux théoriques et applicatifs en collaboration avec un grand nombre de chercheurs situés en France dans divers laboratoires, CAS (Ecole des Mines de Paris), Heudiasyc (CNRS), projet CONGE (INRIA Lorraine), LASB (INRA Montpellier), LBE (INRA Narbonne), projet COMORE (INRIA Sophia-Antipolis), LSS (CNRS), projet SOSSO (INRIA Rocquencourt), et à l'étranger dans divers pays, Etats Unis, Mexique, Royaume uni, Pays bas, Australie, Tunisie, Norvège, Belgique, Chili dans le cadre de mes stages post doctoraux ou à l'occasion de visites de quelques semaines. J'ai eu diverses expériences d'enseignement. J'ai également participé à de nombreuses conférences internationales (CDC, IFAC World Congress, ACC, UAB Conference on Differential Equations, Asian Conference, ECC, MTNS, POSTA) qui m'ont également permis de mieux connaître la communauté scientifique internationale d'automatique.

Ce parcours m'a apporté une grande connaissance de l'univers de la recherche, une maturité et une expérience que je souhaite faire partager à de jeunes chercheurs.

C'est pourquoi je sollicite ma candidature à une habilitation à diriger des recherches en sciences mathématiques, afin de profiter des possibilités à venir d'encadrement de jeunes chercheurs.

Chapitre 2

Liste des travaux

2.1 Publications dans revues à comité de lecture

[1] **F. Mazenc**, M. Malissoff, *Lyapunov Function Constructions for Slowly Time-Varying Systems.* A paraitre dans MCSS.

[2] **F. Mazenc**, M. Malissoff, P. De Leenheer, *On the stability of periodic solutions in the perturbed chemostat.* A paraitre dans Mathematical Biosciences and Engineering (MBE).

[3] M. Malissoff, **F. Mazenc**, *Constructions of strict Lyapunov functions for discrete time and hybrid time-varying systems.* A paraitre dans Journal of Nonlinear Analysis.

[4] F. Grognard, **F. Mazenc**, A. Rapaport. *Polytopic Lyapunov Functions for the Stability Analysis of Interconnected Scalar Systems.* A paraitre dans Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B.

[5] **F. Mazenc**, C. Lobry, A. Rapaport. *Persistence in Ratio-dependent Models for Consumer-Resource Dynamics.* A paraitre dans Electronic Journal of Differential Equations.

[6] **F. Mazenc**, M. Malissoff, M.S. de Queiroz. *Further Constructions of Strict Lyapunov Functions for Rapidly Time-Varying Nonlinear Systems.* Automatica, Vol. 42 :10 Octobre 2006, pp.1663-1671.

[7] **F. Mazenc**, M.S. de Queiroz, M. Malissoff, F. Gao. *Further Results on Active Magnetic Bearing Control with Input Saturation.* IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 14, No.5, sept. 2006, pp. 914-919.

[8] J. Harmand, A. Rapaport, **F. Mazenc**, *Output tracking of continuous bioreactors through recirculation and by-pass.* Automatica, Vol. 42, Issue 6, pp. 1025-1032 (June 2006)

[9] C. Lobry, A. Rapaport, **F. Mazenc**. *Sur un modèle densité-dépendant de compétition pour une ressource.* Compte rendu Biologies, 329 pp. 63-70, 2006.

[10] **F. Mazenc**, M. Malissoff, *Further Constructions of Control-Lyapunov Functions and Stabilizing Feedbacks for Systems Satisfying the Jurdjevic-Quinn Conditions.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 51, No.2, pp. 360- 365, February 2006.

[11] **F. Mazenc**, P.A. Bliman. *Backstepping Design for Time-Delay Nonlinear Systems.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 51, No.1, pp.149-154, January 2006.

[12] M. Malisoff, **F. Mazenc**. *Further Remarks on Strict Input-to-State Stable Lyapunov Functions for Time-Varying Systems.* Automatica, Vol. 41, pp. 1973-1978, 2005.

[13] C. Lobry, **F. Mazenc**, A. Rapaport. *Persistence in ecological models of competition for a single resource.* Compte rendu mathematiques, CRASS 2005.

[14] **F. Mazenc**, S. Mondié, S. Niculescu. *Global Stabilization of Oscillators with Bounded Delayed Input.* Systems & Control Letters, 53 pp. 415-422, 2004.

[15] K. Pettersen, **F. Mazenc**, H. Nijmeijer. *Global Uniform Asymptotic Stabilization of an Underactuated Surface Vessel : Experimental Results.* IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 12, No. 6, pp. 891-903, Nov. 2004.

[16] **F. Mazenc**, S. Bowong. *Backstepping with bounded feedbacks for time-varying systems.* SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 43, Number 3, pp. 856-871, 2004.

[17] **F. Mazenc**, D. Nesic. *Strong Lyapunov functions for systems satisfying the conditions of La Salle.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 49, no.6, pp.1026-1030, 2004.

[18] **F. Mazenc**, S. Mondié, R. Francisco. *Global Asymptotic Stabilization of Feedforward Systems with Delay in the Input.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 49, no.5, pp.844-850, 2004.

[19] **F. Mazenc**, A. Iggidr. *Backstepping with Bounded Feedbacks.* Systems & Control Letters, Vol. 51/3-4, pp. 235-245, 2004.

[20] **F. Mazenc**, S. Bowong. *Tracking Trajectories of the Cart-pendulum System.* Automatica Vol. 39, pp. 677-684, 2003.

[21] **F. Mazenc**. *Strict Lyapunov Fonctions for Time-varying Systems.* Automatica Vol. 39, pp. 349-353, 2003.

[22] **F. Mazenc**, S. Mondié, S. Niculescu. *Global Asymptotic Stabilization for Chains of Integrators with a Delay in the Input.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 48, no.1, pp.57-63, 2003.

[23] **F. Mazenc**, K.Y. Pettersen, H. Nijmeijer. *Global Uniform Asymptotic Stabilization of an Underactuated Surface Vessel.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 47, no.10, pp.1759 -1762, 2002.

[24] **F. Mazenc**, J.C. Vivalda. *Global Asymptotic Output Feedback Stabilization of Feedforward Systems.* European Journal of Control, Vol. 8, No 6, 2002.

[25] **F. Mazenc**, S. Bowong. *Tracking Trajectories of Feedforward Systems.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 47, no.8, pp.1338-1342, 2002.

[26] **F. Mazenc**, E. Richard. *Stabilization of Hydraulic Systems using a Passivity Property.* Systems & Control Letters Vol. 44 (2) pp. 111-117, 2001.

[27] **F. Mazenc**, S. Niculescu. *Lyapunov Stability Analysis for Nonlinear Delay Systems.* Systems & Control Letters, Vol. 42/4, pp 245-251, 2001.

[28] I. Fantoni, R. Lozano, **F. Mazenc**, K.Y. Pettersen. *Stabilization of a nonlinear underactuated hovercraft.*

International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 10, pp. 645-654, 2000.

[29] **F. Mazenc**, A. Astolfi. *Robust Output Feedback Stabilization of a Rigid Body.* Systems & Control Letters, Vol. 39 pp. 203-210, 2000.

[30] **F. Mazenc**, L. Praly. *Asymptotic Tracking of a State Reference for Systems with a Feedforward Structure.* Automatica, Vol. 36 (2) pp. 179-187, 2000.

[31] **F. Mazenc**, R. Sepulchre, M. Jankovic. *Lyapunov Fonctions for Stable Cascades and Applications to Global Stabilization.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 44, No.8, 1999.

[32] **F. Mazenc**, H. Nijmeijer. *Discrete-time Forwarding in Nonlinear Systems.* Int. J. Control, Vol. 71, No.5, pp. 823-835, 1998.

[33] **F. Mazenc**. *Cascade of Unstable Nonlinear Systems, Local and Global Stabilization.* Systems & Control Letters, Vol. 35 pp. 317-323, 1998.

[34] **F. Mazenc**. *Stabilization of Feedforward Systems Approximated by a Nonlinear Chain of Integrators.* Systems & Control Letters, Vol. 32, no.4, pp.223-229, 1997.

[35] **F. Mazenc**, L. Praly. *Adding an Integration and Global Asymptotic Stabilization of Feedforward Systems.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 41, no.11, pp.1559-1578, 1996.

[36] **F. Mazenc**, L. Praly, W.P. Dayawansa. *Global stabilization by output feedback : examples and counter examples.* Systems & Control Letters, Vol. 23, pp. 119-125, 1994.

2.2 Chapitres de livres

[37] **F. Mazenc**, C. Lobry, A. Rapaport, *Stability Analysis of an Ecological Model.* Springer-Verlag, ISSN :0170-8643, Volume 341/2006 Title : Positive Systems ISBN : 978-3-540-34771-2, pp. 113-120.

[38] R. Francisco, **F. Mazenc**, S. Mondié *Global Asymptotic Stabilization of a PVTOL Aircraft Model with Delay in the Input.* A paraitre dans Springer LNCIS volume Applications of Time Delay Systems.

[39] S. Niculescu, W. Michiels, D. Melchor-Aguillar, T. Luzyanina, **F. Mazenc**, K. Gu, F. Chatté. *Delay effects on the asymptotic stability of various fluid models in high-performance networks.* Springer-Verlag, ISSN : 0170-8643. Volume 308/2004 Title : Adavances in Communication Control Networks Editors : Sophie Tabouriech, Chaouki T. Abdallah, John Chiasson. ISBN : 3-540-22819-5. DOI : 10.1007/b95076. Chapter : p. 87.

[40] **F. Mazenc**, S. Mondié, S. Niculescu. *Global Stabilization of Oscillators With Bounded Delayed Input.* Advances in time-delay systems. LNCSE Vol. 38, Springer-Verlag, 2004 Editors : S. Niculescu, Kequin Gu.

[41] **F. Mazenc**. *Differentiable Lyapunov Function and Center Manifold Theorem.* (A. Isidori, F. Lamnabhi-Lagarrigue, W. Respondek, Eds.) Vol.2, LNCIS 258 & 259, November 2000, ISBN 1-85233-363-4 & ISBN 1-85233-364-2, Springer-Verlag London, pp. 143-149.

[42] T. Ahmed-Ali, **F. Mazenc**, F. Lamnabhi-Lagarrigue. *Inverse Optimal Stabilization for Discrete-time Nonlinear Systems : Application to Feedforward Systems* (D. Aeyels, F. Lamnabhi-Lagarrigue, A.J. Van der

Shaft, Eds), LNCIS 246, July 1999, ISBN 1-85233-638-2, Springer-Verlag London, pp. 1-16.

2.3 Actes de conférences à comité de lecture

[43] A. Rapaport, J. Harmand, **F. Mazenc**, *Design of Continuous Bioprocesses and Biodiversity.* ACC07.

[44] **F. Mazenc**, J. Harmand, M. Malisoff, *Stabilization of a Periodic Trajectory for a Chemostat with two species.* ACC07.

[45] **F. Mazenc**, M. Malisoff, Z. Lin, *Further Results on Input-to-State Stability for Nonlinear Systems with Delayed Feedbacks.* ACC07.

[46] M. Malissoff, **F. Mazenc**, *On Control-Lyapunov Functions for Hybrid Time-Varying Systems.* 45th IEEE Conference on decision and control, San Diego, 2006.

[47] **F. Mazenc**, M. Malissoff, *Lyapunov Function Constructions for Slowly Time-Varying Systems.* 45th IEEE Conference on decision and control, San Diego, 2006.

[48] **F. Mazenc**, P. De Leenheer, M. Malissoff, *Stabilizing a Periodic Solution in the Chemostat : A Case Study in Tracking.* 45th IEEE Conference on decision and control, San Diego, 2006.

[49] **F. Mazenc**, M. Malissoff. *Constructions of Strict Lyapunov Functions for Discrete Time and Hybrid Time-Varying Systems.* "International Conference of Hybrid Systems and Applications in May 2006". International Federation of Nonlinear Analysts, University of Louisiana at Lafayette, May 22-26, 2006.

[50] **F. Mazenc**, C. Lobry, A. Rapaport. *Stability Analysis of an Ecological Model.* POSTA06,
http ://www.lag.ensieg.inpg.fr/POSTA06/myreview/.

[51] **F. Mazenc**, M. Malissoff, M.S. de Queiroz. *Further Constructions of Strict Lyapunov Functions for Rapidly Time-Varying Nonlinear Systems.* ACC06.

[52] A. Rapaport, **F. Mazenc**, J. Harmand. *Output tracking of bioprocesses through recirculation with unknown input concentration.* ADCHEM 2006.

[53] **F. Mazenc**, S. Bowong, *Backstepping with Bounded Feedback for Time-Varying Systems.* 44th IEEE Conference on decision and control and European Control Conference, Seville, Spain 2005.

[54] **F. Mazenc**, D. Nesic, *Lyapunov functions for time varying systems satisfying generalized conditions of Matrosov theorem.* 44th IEEE Conference on decision and control and European Control Conference, Seville, Spain 2005.

[55] **F. Mazenc**, M.S. de Queiroz, M. Malisoff, *Further Results on Active Magnetic Bearing Control with Input Saturation.* 44th IEEE Conference on decision and control and European Control Conference, Seville, Spain 2005.

[56] F. Grognard, **F. Mazenc**, A. Rapaport, *Polytopic Lyapunov functions for the stability analysis of persistence of competing species.* 44th IEEE Conference on decision and control and European Control Conference, Seville, Spain 2005 and INTERNATIONAL WORKSHOP ON DIFFERENTIAL EQUATIONS IN MATHEMATICAL BIOLOGY, University of Le Havre- LMAH, Le Havre, France, July 11-13, 2005

[57] M. Malisoff, **F. Mazenc**, *Control-Lyapunov Functions for Systems Satisfying the Conditions of the Jurdjevic-Quinn Theorem.* 44th IEEE Conference on decision and control and European Control Conference, Seville, Spain 2005.

[58] M. Malisoff, **F. Mazenc**, *Further Constructions of Strict Lyapunov Functions for Time-Varying.* American Control Conference (Portland, OR, June 2005), pp. 1889-1894 et Sixth SIAM Conference on Control and its applications. July 11-114, New Orleans, L.A. 2005.

[59] J. Harmand, **F. Mazenc**, A. Rapaport. *The joy of controlling bioreactors through recirculation.* IFAC World Congress, Prague, CZ, 2005. pages web : http ://ifacplaza.certicon.cz/

[60] R. Francisco, **F. Mazenc**, S. Mondié. *Stabilization of a PVTOL Aircraft with Delay in the Input.* IFAC World Congress, Prague, CZ, 2005. pages web : http ://ifacplaza.certicon.cz/

[61] **F. Mazenc**, C. Lobry, A. Rapaport, *Persistence in Ratio-Dependent Models of Consumer-Resource Dynamics.* The sixth Mississippi State - UAB Conference on Differential Equations & Computational Simulations. May 13-14, 2005.

[62] M. Mabrouk, **F. Mazenc**, J.C Vivalda. *On Global Observers for some Mechanical Systems.* 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control. December 8-10, Oaxaca, Mexico, 2004.

[63] **F. Mazenc**, S. Mondié, R. Francisco. *Global Asymptotic Stabilization of Feedforward Systems with Delay in the Input and Vanishing perturbations.* 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control. December 8-10, Oaxaca, Mexico, 2004.

[64] **F. Mazenc**, D. Nesic. *Strong Lyapunov functions for systems satisfying the conditions of La Salle.* Asian Conference, Melbourne 2004.

[65] S. Niculescu, W. Michiels, D. Melchor-Aguillar, **F. Mazenc**, F. Chatté. *Stability Analysis on High-Performances Networks : A Time-domain Approach.* IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling, pp. 28–30 Juin 28, Rhodes, Greece, ASM 2004.

[66] **F. Mazenc**, S. Mondié, R. Fancisco. *Global Asymptotic Stabilization of Feedforward Systems with Delay in the Input.* 42th IEEE Conference on decision and control, Maui, Hawaii, 2003.

[67] **F. Mazenc**, P.A. Bliman, *Backstepping Design for Time-Delay Nonlinear Systems.* 42th IEEE Conference on decision and control, Maui, Hawaii, 2003.

[68] **F. Mazenc**, S. Niculescu. *Remarks on the stability of a class of TCP-like congestion control models.* 42th IEEE Conference on decision and control, Maui, Hawaii, 2003.

[69] **F. Mazenc**, R. Mahony, R. Lozano. *Forwarding control of scale model autonomous helicopter : A Lyapunov control design.* 42th IEEE Conference on decision and control, Maui, Hawaii 2003.

[70] **F. Mazenc**, C. Prieur, *Switching using distributed delays.* IFAC Workshop on Time-Delay Systems, INRIA, Rocquencourt, France September 8-10, 2003

[71] **F. Mazenc**, S. Mondié, S. Niculescu. *Global Stabilization of Oscillators With Bounded Delayed Input.* 41th IEEE Conference on decision and control, Las Vegas, 2002.

[72] **F. Mazenc**, K.Y. Pettersen, H. Nijmeijer. *Global Uniform Asymptotic Stabilization of an underactuated*

Surface Vessel. 41th IEEE Conference on decision and control, Las Vegas, 2002.

[73] S. Mondié, R. Lozano, **F. Mazenc**. *Semiglobal Stabilization of continuous systems with bounded delayed inputs.* IFAC World Congress, Barcelone, 2002.

[74] S. Mondié, R. Francisco, **F. Mazenc**. *Estabilidad asintotica uniforme de un doble integrador con cota y retardo en la entrada.* Congreso Latinoamericano IFAC de Control Automatico, December 4-7, Guadalajara, Mexique, 2002.

[75] **F. Mazenc**, S. Bowong. *Tracking Trajectories of Feedforward Systems : Application to the Cart-pendulum System.* 40th IEEE Conference on decision and control, Orlando, 2001.

[76] **F. Mazenc**, S. Mondié, S. Niculescu. *Global Asymptotic Stabilization for Chains of Integrators with a Delay in the Input.* 40th IEEE Conference on decision and control, Orlando, 2001.

[77] **F. Mazenc**, J.C. Vivalda. *Global Asymptotic Output Feedback Stabilization of Feedforward Systems.* ECC 2001, Porto, Portugal.

[78] I. Fantoni, R. Lozano, **F. Mazenc**. *Control of the PVTOL aircraft using the forwarding technique and a Lyapunov approach.* ECC 2001, Porto, Portugal.

[79] **F. Mazenc**, A. Iggidr. *Backstepping with Bounded Feedbacks for Systems not in Feedback Form.* 5th IFAC SYMPOSIUM "Nonlinear Control Systems" (NOLCOS'01).

[80] A. Astolfi, **F. Mazenc**. *A geometric characterization of feedforward systems.* MTNS, Perpignan, France, 2000.

[81] **F. Mazenc**, S. Niculescu. *Lyapunov Stability Analysis for Nonlinear Delay Systems.* 39th IEEE Conference on decision and control, Sydney, Australia, 2000.

[82] **F. Mazenc**, L. Praly. *Strict Lyapunov Fonctions for Feedforward Systems and Applications.* 39th IEEE Conference on decision and control, Sydney, Australia, 2000.

[83] I. Fantoni, R. Lozano, **F. Mazenc** and K.Y. Pettersen. *Stabilization of a Nonlinear Underactuated Hovercraft.* 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, 1999.

[84] **F. Mazenc**, A. Astolfi. *Robust Output Feedback Stabilization of a Rigid Body.* IFAC World Congress, Beijing, 1999.

[85] T. Ahmed-Ali, **F. Mazenc**, F. Lamnabhi-Lagarrigue. *Inverse Optimal Stabilization for Discrete-time Nonlinear Systems : Application to Feedforward Systems.* IFAC World Congress, Beijing, 1999.

[86] I. Fantoni, R. Lozano, **F. Mazenc**, A. Annaswamy. *Stabilization of a two-link robot using an energy approach.* ECC 1999, Karlsruhe.

[87] A. Astolfi, M-C. Laiou, **F. Mazenc**. *New results and examples on a class of discontinuous controllers.* ECC 1999, Karlsruhe.

[88] **F. Mazenc**, A. Astolfi, R. Lozano. *Lyapunov Function for the Ball and Beam : Robustness Property.* 38th IEEE Conference on decision and control, Phoenix, 1999.

[89] **F. Mazenc**, A. Astolfi. *Nonlinear Stabilization of Particular Interconnected Structures.* 37th IEEE Conference on decision and control, Tampa, 1998.

[90] **F. Mazenc**, R. Sepulchre, M. Jankovic. *Lyapunov Fonctions for Stable Cascades and Applications to Global Stabilization.* 36th IEEE Conference on decision and control, San Diego, 1997.

[91] **F. Mazenc**, L. Praly. *Asymptotic Tracking of a State Reference for Systems with a Feedforward Structure.* ECC 1997, Bruxelle.

[92] **F. Mazenc**, L. Praly. *Adding an Integration and Global Asymptotic Stabilization of Feedforward Systems.* 33th IEEE Conference on decision and control, Orlando, 1994.

2.4 Publication en révision pour revues à comité de lecture

[93] **F. Mazenc**, D. Nesic. *Lyapunov functions for time varying systems satisfying generalized conditions of Matrosov theorem.* MCSS.

[94] A. Rapaport, J. Harmand, **F. Mazenc**, *About design of continuous bioprocesses and biodiversity.* Mathematical Biosciences and Engineering (MBE).

2.5 Publications soumises

[95] **F. Mazenc**, M. Malisoff, Z. Lin, *Further Results on Input-to-State Stability for Nonlinear Systems with Delayed Feedbacks.* Soumis à Automatica.

[96] A.K. Abdou, C. Lobry, J. Harmand, A. Rapaport, **F. Mazenc**. *Multi-stability of equilibrium profiles in plug flow bioreactors.* Soumis à Mathematical and Computer Modelling.

[97] P. Gajardo, **F. Mazenc**, H. Ramirez. *Competitive exclusion principle in a model of chemostat with delay.* Rapport CMM.

[98] **F. Mazenc**, C. Lobry *Effect of Intra-specific on Persistence in Competition Models.* Soumis à MBE

2.6 Thèse de doctorat

[99] **F. Mazenc**. *Stabilisation de trajectoire, ajout d'intégration, commande saturée.* Doctorat de Mathématique et Automatique, obtenu le 22/04/1996 à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. Etablissement d'origine du diplôme : Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. Directeur de thèse : Laurent Praly.

Deuxième partie

Thèmes de recherche

Chapitre 3

Rappels, contexte

Dans ce chapitre, nous commençons par introduire quelques notions de bases relatives à la stabilité des systèmes dynamiques, puis nous rappelons certains résultats majeurs de la théorie des systèmes non linéaires que nous serons amenés à utiliser ou à évoquer tout au long de ce mémoire.

3.1 Remarques préliminaires et notations

1) Si une fonction à valeur réelle $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a des dérivées d'ordre arbitraire continues, nous dirons qu'elle est régulière et noterons sa $i$ème dérivée par $k^{(i)}(\cdot)$.

2) Les fonctions rencontrées seront supposées être suffisamment régulières. Si des questions relatives à leur régularité se présentent, celle-ci sera alors spécifiée.

3) Pour simplifier les notations, dans les contextes où aucune confusion ne peut se produire, l'argument des fonctions sera supprimé ou simplifié. Par exemple, nous pourrons noter $f(x(t))$ simplement par $f(t)$ ou $f(\cdot)$.

4) Nous noterons l'ensemble des entiers (privé de zéro) N. Nous noterons l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels positifs $\mathbb{R}_{\geq 0}$ et l'ensemble des réels strictement positifs $\mathbb{R}_{>0}$.

5) Nous noterons par $|\cdot|$ la norme euclidienne d'un vecteur ou d'une matrice.

6) Nous dirons qu'une fonction $\gamma(X)$ est d'ordre un (resp. deux) à l'origine si pour un certain $c > 0$, l'inégalité $|\gamma(X)| \leq c|X|$ (resp. $|\gamma(X)| \leq c|X|^2$) est satisfaite sur un voisinage ouvert de l'origine.

7) Une fonction $f(\cdot)$ à valeur réelle est concave si, pour tout réels a, b, l tels que $a \leq b$, $l \in [0, 1]$, l'inégalité

$$lf(a) + (1-l)f(b) \ \leq \ f(la + (1-l)b)$$

est satisfaite.

8) L'inégalité de Cauchy-Schwartz est la suivante. Soient $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ deux fonctions à valeur réelle continues sur un intervalle $[a, b]$ avec $a \leq b$. Alors

$$\int_a^b f(s)g(s)ds \ \leq \ \sqrt{\int_a^b f(s)^2 ds \int_a^b g(s)^2 ds}\ . \tag{3.1}$$

9) Soient deux fonctions $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Nous emploierons pour désigner les dérivées de Lie successives de V le long du champ de vecteur f les notations suivantes :

$$L_f^1 V(x) = L_f V(x) := \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \ , \ L_f^{i+1} V(x) := L_f(L_f^i V(x)), \quad \forall i \in N \ .$$

10) Soit une fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et r un réel positif. Nous noterons par x_t, la fonction définie par $x_t(\theta) = x(t+\theta), \forall \theta \in [-r, 0]$.

3.2 Définitions et résultat de base

Soit un système dynamique non linéaire et non autonome de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}(t) & = & f(t,x) \\ x(t,t_0) & = & x_0 \end{array} \right. \tag{3.2}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs continu en t et localement Lipschitz en x sur $[0, +\infty) \times D$ et $D \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine qui contient l'origine $x = 0$.

Définition 1 *L'origine est un point d'équilibre de (3.2) si*

$$f(t, 0) = 0 \ , \ \forall t \geq 0 \ .$$

Définition 2 *Le point d'équilibre $x = 0$ de (3.2) est*

- *stable si, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que*

$$|x(t_0, t_0)| < \delta \Rightarrow |x(t, t_0)| < \varepsilon \ , \ \forall t \geq t_0 \geq 0 \ . \tag{3.3}$$

- *uniformément stable si, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, indépendant de t_0, tel que la relation (3.3) est satisfaite.*
- *instable si il n'est pas stable.*
- *asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe $c = c(t_0) > 0$ tel que $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t, t_0) = 0$ pour tout $|x(t_0, t_0)| < c$.*
- *uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et s'il existe $c > 0$, indépendant de t_0, tel que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $T = T(\varepsilon) > 0$ tel que*

$$|x(t, t_0)| < \varepsilon \ , \ \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon) \ , \ \forall |x(t_0, t_0)| < c \ .$$

- *globalement uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et si toutes paires de réels positifs ε, c, il existe $T = T(\varepsilon, c) > 0$ tel que*

$$|x(t, t_0)| < \varepsilon \ , \ \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon, c) \ , \ \forall |x(t_0, t_0)| < c \ .$$

Définition 3 *Une fonction $\alpha : [0, a) \to [0, +\infty)$ est dite appartenir à la classe des fonctions $\mathcal{K}$ si celle-ci est continue, strictement croissante et $\alpha(0) = 0$. Elle est dite appartenir à la classe de fonction $\mathcal{K}_\infty$ si $a = +\infty$ et*

$$\lim_{r \to +\infty} \alpha(r) = +\infty \ .$$

Définition 4 *Une fonction continue $\beta : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est dite appartenir à la classe des fonctions $\mathcal{KL}$ si, pour tout s fixé, la fonction $\beta(r, s)$ est de classe $\mathcal{K}$ par rapport à r et, pour tout $r > 0$ fixé, la fonction $\beta(r, s)$ est strictement décroissante par rapport à s et*

$$\lim_{s \to +\infty} \beta(r, s) = 0 \ .$$

Rappelons le lemme technique suivant.

Lemme 5 *Le point d'équilibre $x = 0$ de (3.2) est*

- *uniformément stable si et seulement si il existe une fonction α de classe $\mathcal{K}$ et une constante $c > 0$ telles que*
$$|x(t,t_0)| \leq \alpha(|x(t_0,t_0)|) \ , \ \forall t \geq t_0 \geq 0 \ , \ \forall |x(t_0,t_0)| < c$$
- *uniformément asymptotiquement stable si et seulement si il existe une fonction β de classe $\mathcal{KL}$ et une constante $c > 0$ telles que*
$$|x(t,t_0)| \leq \beta(|x(t_0,t_0)|, t - t_0) \ , \ \forall t \geq t_0 \geq 0 \ , \ \forall |x(t_0,t_0)| < c \tag{3.4}$$
- *globalement uniformément asymptotiquement stable si et seulement si l'inégalité (3.4) est satisfaite pour toute condition initiale $x(t_0,t_0)$.*

Grâce à ce lemme, nous pouvons introduire la notion d'exponentielle stabilité.

Définition 6 *Le point d'équilibre $x = 0$ de (3.2) est exponentiellement stable si l'inégalité (3.4) est satisfaite avec*
$$\beta(r,s) = kre^{-\gamma s}$$
où k et γ sont deux constantes strictement positives. Il est globalement exponentiellement stable si cette condition est satisfaite pour toute condition initiale.

Définition 7 *Une fonction $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, pour laquelle il existe des fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \in \mathcal{K}_\infty$ et $\alpha_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}_{\geq}$ ce qui suit est vérifié*
$$\alpha_1(|x|) \ \leq \ V(t,x) \ \leq \ \alpha_2(|x|) \ , \tag{3.5}$$
$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t,x) \ \leq \ -\alpha_3(x) \ , \tag{3.6}$$
$$\left| \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) \right| \ \leq \ \alpha_4(|x|) \ , \tag{3.7}$$
est appelée fonction de Lyapunov pour le système (3.2) si α_3 est semi-définie positive, et fonction de Lyapunov stricte pour le système (3.2) si α_3 est définie positive.

3.3 Théorêmes de Lyapunov

3.3.1 Théorème classique

Nous rappelons maintenant le théorème de Lyapunov pour les systèmes variant dans le temps, valable bien sûr également pour les systèmes autonomes.

Théorème 8 *Soit $x = 0$, un point d'équilibre de (3.2) et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant $x = 0$. Soit $V : [0, +\infty) \times D \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable telle que*
$$\alpha_1(|x|) \leq V(t,x) \leq \alpha_2(|x|) \ , \ \forall t \in [0, +\infty) \ , \ \forall x \in D \tag{3.8}$$
$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t,x) \leq -\alpha_3(x) \ , \ \forall t \in [0, +\infty) \ , \ \forall x \in D \tag{3.9}$$
où α_1, α_2, α_3 sont des fonctions définies positives et continues sur D. Alors $x = 0$ est uniformément asymptotiquement stable. Si $D = \mathbb{R}^n$ et α_1 est de classe $\mathcal{K}_\infty$, alors $x = 0$ est globalement uniformément asymptotiquement stable.

3.3.2 Théorèmes de Lyapunov pour les systèmes à retard

Rappelons deux théorèmes de type Lyapunov qui jouent un rôle majeur dans l'étude de la stabilité des systèmes à retard. Nous allons employer la notation x_t, introduite à la section 3.1.

Le premier est le théorème de Razumikhin :

Théorème 9 *[HV] Considérons l'équation différentielle fonctionnelle suivante*

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & f(t, x_t) \ , t \geq 0 \ , \\ x_{t_0}(\theta) & = & \phi(\theta) \ , \forall \theta \in [-\tau, 0] \ , \end{array} \tag{3.10}$$

où la fonction $f : \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ est telle que l'image par f de $\mathbb{R} \times$ (un sous ensemble borné de $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ est un sous ensemble borné de $\mathbb{R}^n$.
S'il existe une fonction $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et des fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ non décroissantes, α_1, α_2 définies positives et α_2 strictement croissante telles que, pour tout $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$,
(a) $\alpha_1(|x|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(|x|)$,
(b) $\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) f(t, x_t) \leq -\alpha_3(|x|)$ si $V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, x(t)), \forall \theta \in [-\tau, 0]$,
alors la solution triviale de (3.10) est uniformément stable.

De plus, si $\alpha_(s) > 0$ quand $s > 0$ et il existe une fonction $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $p(s) > s$ quand $s > 0$ telle que, pour tout $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$,
(a) $\alpha_1(|x|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(|x|)$,
(b) $\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) f(t, x_t) \leq -\alpha_3(|x|)$ si $V(t + \theta, x(t + \theta)) < p(V(t, x(t)))$, $\forall \theta \in [-\tau, 0]$,
alors la solution nulle de (3.10) est uniformément asymptotiquement stable.

Nous allons rappeler le Corollaire V.3.1 de [HV]. Avant cela, donnons la définition V.5.3 de [HV] de fonctionnelle de Lyapunov.

Définition 10 *Pour une équation différentielle fonctionnelle de la forme*

$$\dot{z} \ = \ F(z_t) \ , \tag{3.11}$$

une fonctionnelle $V : C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ est appelée fonctionnelle de Lyapunov sur un ensemble G si V est continue sur $\overline{G}$ et $\dot{V} \leq 0$ sur G, où $\dot{V}$ est définie par

$$\dot{V}(z_t) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h} [V(z_{t+h}) - V(z_t)] \ .$$

Donnons maintenant le Corollaire V.3.1 de [HV].

Théorème 11 *[HV] Supposons que $z = 0$ est une solution de (3.11) et que $V : C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ est continue et telle que $V(0) = 0$. S'il existe une fonction α_1 de classe $\mathcal{K}_\infty$ et une fonction positive α_2 telles que, pour tout $t \geq 0$,*

$$\alpha_1(|z(t)|) \leq V(z_t) \ , \ \dot{V}(z_t) \leq -\alpha_2(|z(t)|) \tag{3.12}$$

alors la solution nulle est stable et toutes les solutions sont bornées. Si de plus α_2 est définie positive, alors toutes les solutions convergent vers l'origine.

3.4 Construction de fonctions Lyapunov : motivation

Lors de l'étude d'un système dynamique, la connaissance d'une fonction de Lyapunov stricte est d'une grande utilité. Les divers avantages procurés par cet outil sont si nombreux qu'on ne peut tous les énumérer de façon exhaustive. Certains d'entre eux sont les suivants.

En tout premier lieu, la connaissance d'une fonction de Lyapunov stricte permet de conclure, au moyen du théorème de Lyapunov que nous avons rappelé, qu'un point d'équilibre d'un système considéré est uniformément asymptotiquement stable sur un certain domaine.

Au moyen d'une fonction de Lyapunov stricte, on peut déterminer un sous ensemble du bassin d'attraction de l'équilibre d'un système localement uniformément asymptotiquement stable.

Les techniques d'ajout d'intégration (*forwarding*) et d'ajout d'intégrateur (*backstepping*) que nous allons brièvement présenter dans ce chapitre, utilisent, dans bien des cas, la connaissance d'une fonction de Lyapunov stricte pour certains sous-systèmes.

De récentes avancées concernant l'étude de la stabilité ou de la stabilisabilité de systèmes non linéaires à retard utilisent la connaissance de fonctions de Lyapunov strictes : voir en particulier [T4, J1, J2, MN1].

La notion de stabilité ISS, introduite dans [S3], qui joue un rôle essentiel en matière d'analyse de stabilité et de construction de loi de commande, peut être mise en évidence grâce à la connaissance d'une fonction de Lyapunov : voir en particulier à ce sujet [SW].

Enfin, observons que les fonctions de Lyapunov strictes sont d'utiles outils dans le cadre de l'analyse de la robustesse de systèmes. Par exemple, des propriétés de robustesse vis à vis de dynamiques non modélisées sont mises en évidence dans [PW], [SJK] et bien des résultats relatifs aux perturbations L^p exploitent des fonctions de Lyapunov : tel est le cas de ceux qui se trouvent dans [T2] et [LCS].

Les fonctions de Lyapunov qui ne sont pas strictes peuvent permettre de prouver l'asymptotique stabilité (au moyen en particulier du principe d'invariance de LaSalle, voir [L1], ou du théorème de Mastrosov, voir [M1]), mais ces fonctions sont loin de présenter tous les avantages qu'offrent les fonctions de Lyapunov strictes. En particulier, elles fournissent peu d'aide lorsqu'on souhaite étudier des propriétés de robustesse.

Rappelons que le théorème de Lyapunov inverse (voir [H, K5]) assure pour tout système globalement uniformément asymptotiquement stable l'existence d'une fonction de Lyapunov stricte, mais que ce théorème n'est pas constructif.

Ainsi est motivée la mise en oeuvre de techniques permettant de construire pour des classes de systèmes, des familles de fonctions de Lyapunov strictes. Les constructions que nous présenterons dans ce mémoire, menées dans les trois contextes très différents que sont ceux des systèmes non linéaires autonomes sans retard, des systèmes à retard et des systèmes non autonomes, illustreront la grande diversité des techniques de Lyapunov et de leurs domaines d'application.

3.5 Ajout d'intégrateur, *backstepping*

La technique d'ajout d'intégrateur, appelée aussi *backstepping*, introduite par Byrnes et Isidori [BI], Kolesnikov [K3], Tsinias [T6], Coron et Praly [CP], est devenue l'une des méthodes de base de construction de lois de commande stabilisantes. Les avantages inhérents à cette technique sont bien connus. Observons en particulier qu'elle procure une grande famille de lois de commande globalement asymptotiquement stabilisantes, permet de résoudre divers problèmes de robustesse et de commande adaptative [KKK].

Cette approche répond essentiellement à la question de savoir quand est ce que la stabilisabilité asymptotique du système :

$$\dot{y} = f(y,u) , \tag{3.13}$$

où u est l'entrée, implique celle du système :

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y,x) , \\ \dot{x} = h(x,y,u) , \end{cases} \tag{3.14}$$

où u est l'entrée. De la réponse à ce problème, on peut déduire une preuve de la stabilisabilité asymptotique globale de systèmes sous forme dite *feedback*, c'est à dire ayant la structure récurrente particulière suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x}_1 & = & f_1(x_1,x_2)\ ,\\ \dot{x}_2 & = & x_3+f_2(x_1,x_2)\ ,\\ & \vdots & \\ \dot{x}_n & = & u+f_n(x_1,\ldots\ldots,x_n)\ ,\end{array}\right. \tag{3.15}$$

avec pour seule hypothèse celle de la stabilisabilité asymptotique globale du système $\dot{x} = f_1(x,u)$ par une loi de commande suffisamment régulière.

3.6 Ajout d'intégration, *forwarding*

La technique d'ajout d'intégration, appelée aussi *forwarding*, introduite par Teel [T5] puis développée au moyen de constructions de fonctions de Lyapunov par moi même au cours de mon doctorat dirigé par L. Praly [MP1], ainsi que par Jankovic, Sepulchre, Kokotovic [JSK], est devenue une méthode de construction de lois de commande stabilisantes pour des systèmes non linéaires essentielle. Elle a été généralisée de diverses manières — systèmes approximés par une chaîne d'intégrateurs homogène, systèmes en temps discret, systèmes variant dans le temps, systèmes à retard, systèmes possédant une approximation linéaire exponentiellement instable — (voir par exemple [M3], [MP3], [MMN1], [I, Chapitre 14], [MI], [MN2], [GSB]). Elle répond essentiellement à la question de savoir quand est ce que la stabilité asymptotique globale de l'origine du système :

$$\dot{y} \ = \ f_1(y)+f_2(y,u)u \tag{3.16}$$

lorsque $u=0$ implique la stabilisabilité asymptotique globale du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x} & = & Mx+h_1(y)+h_2(x,y,u)u\ ,\\ \dot{y} & = & f_1(y)+f_2(y,u)u\ ,\end{array}\right. \tag{3.17}$$

où M est une matrice stable et h_1 vérifie $h_1(0)=0$. De la réponse à ce problème, on peut déduire une preuve de la stabilisabilité asymptotique globale de systèmes s'exprimant sous forme dite *feedforward*, c'est à dire ayant la structure récurrente particulière suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x}_n & = & M_nx_n+h_{1,n}(y_{n-1})+h_{2,n}(y_n,u)u\ ,\\ \dot{x}_{n-1} & = & M_{n-1}x_{n-1}+h_{1,n-1}(y_{n-2})+h_{2,n-1}(y_{n-1},u)u\ ,\\ & \vdots & \\ \dot{x}_1 & = & M_1x_1+h_{1,1}(y_0)+h_{2,1}(x_1,y_0,u)u\ ,\\ \dot{y} & = & f_0(y)+f_{10}(y,u)u\ ,\end{array}\right. \tag{3.18}$$

où chaque M_i est une matrice stable et chaque fonction $h_{1,i}$ satisfait $h_{1,i}(0)=0$. Le problème de la stabilisation asymptotique globale de ces systèmes a présenté un grand intérêt théorique. Observons en particulier que ces systèmes ne sont en général pas linéarisables et ne peuvent être stabilisés au moyen de la technique d'ajout d'intégrateurs. Observons de plus que des systèmes physiques tels que le système pendule-chariot (voir [MB]), le système '*ball and beam*' avec un terme de friction (voir [SJK]), le système TORA (voir [SJK]), le système PVTOL (voir [T5]), sont décris, après un changement de loi de commande, par des équations ayant la structure *feedforward*.

Chapitre 4

Systèmes non linéaires autonomes

Ce chapitre traite de deux problèmes distincts de stabilisation de systèmes non linéaires autonomes et sans retard. La première partie de ce chapitre présente un résultat de stabilisation par retour de sortie pour les systèmes *feedforward* (voir [24], [73]). La deuxième un résultat de construction de fonctions de Lyapunov strictes pour des systèmes asymptotiquement stables vérifiant des conditions de type LaSalle qui s'expriment au moyen de dérivées de Lie (voir [17], [61]).

4.1 Stabilisation par retour de sortie de systèmes *feedforward*

Dans cette partie, nous résolvons le problème de la stabilité asymptotique globale par retour dynamique de sortie de systèmes non linéaires appartenant à une famille particulière de systèmes *feedforward*. Les équations considérées dépendent non linéairement de la partie non mesurée de l'état et sont à déphasage non minimal. Nous obtenons une famille de lois de commande contenant des éléments arbitrairement petits en norme. Le résultat peut être appliqué de façon récursive. Au chapitre 7, nous illustrerons ce résultat en l'appliquant à un problème de stabilisation par retour de sortie d'un système mécanique appelé "pendule-chariot", lorsque les variables de vitesse sont les variables non mesurées.

Notons qu'il est connu qu'en pratique certaines variables (variable de vitesse en particulier) ne peuvent être mesurées et que le problème de la stabilisation asymptotique globale de systèmes *feedforward* est réputé être difficile.

4.1.1 Résultat principal

Considérons le système *feedforward* suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Mx + h_1(z)z + h_2(z,u)u \ , \\ \dot{z} & = & Az + \phi(z) + B(z,u)u \ , \\ y & = & Cx \ , \end{array} \right. \tag{4.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ sont les composantes de l'état, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ est l'entrée et M, A, C sont des matrices de dimensions appropriées. Nous introduisons les hypothèses suivantes.
Hypothèse A1.
A1.1 La matrice A est Hurwitz : il existe une matrice symétrique et définie positive S telle que

$$SA + A^\top S \ \leq \ -I \tag{4.2}$$

où I représente la matrice identité de dimension $n_x \times n_x$.
A1.2 La fonction $\phi(z)$ est d'ordre 2 à l'origine.
A1.3 Le sous-système en z (4.1) avec $u = 0$ est globalement asymptotiquement stable. De plus, il existe $\mu_{2*} > 0$ tel que, pour tout $u(t)$ de classe C^1 plus petit en norme que $\mu_{2*} > 0$ pour tout $t \geq 0$, la solution

$z(t)$ est définie pour tout $t \geq 0$. De plus, pour tout $\mu_1 > 0$, il existe $\mu_2 \in (0, \mu_{2*}]$ tel que, pour tout $u(t)$ de classe C^1 plus petit en norme que μ_{2*} pour tout $t \geq 0$ et pour toute condition initiale z_0, il existe $T_{z_0} \geq 0$ tel que, pour tout $t \geq T_{z_0}$, $|z(t)| \leq \mu_1$.
Hypothèse A2. Pour tout $\mu > 0$, il existe une loi de commande $u_s(x, z)$ de classe C^1, satisfaisant $u_s(0, 0) = 0$, bornée en norme par μ et telle que le système en boucle fermée

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Mx + h_1(z)z + h_2(z, u_s(x, z))u_s(x, z) + d(t) \ , \\ \dot{z} & = & Az + \phi(z) + B(z, u_s(x, z))u_s(x, z) \ , \end{array} \right. \tag{4.3}$$

est globalement asymptotiquement stable et localement exponentiellement stable quand $d = 0$. De plus, les solutions de (4.3) convergent vers l'origine quand $d(t)$ est une fonction de classe C^1 qui converge vers zéro et appartient à $L^1([0, +\infty[)$.
Hypothèse A3. La paire (M, C) est détectable : il existe une matrice L telle que $M + LC$ est Hurwitz.

Théorème 12 *Considérons le système (4.1). Supposons que les hypothèses A1, A2, A3 sont satisfaites. Alors, pour tout $\delta > 0$, le système (4.1) est globalement asymptotiquement et localement exponentiellement stabilisable par un retour dynamique de sortie de classe C^1 borné en norme par δ.*

4.1.2 Discussion du théorème 12

1. A part A1.3, les conditions des hypothèses A1 et A2 sont satisfaites par tous les systèmes *feedforward* satisfaisant les hypothèses du Théorème V.1 de [MP1]. Observons que si un système globalement asymptotiquement stable admet une fonction de Lyapunov ayant des dérivées partielles bornées, alors toutes ses trajectoires convergent vers l'origine même lorsqu'est présente une perturbation additive de classe C^1 qui converge vers zéro et appartient à $L^1([0, +\infty[)$.

2. Evidemment, en général, on peut utiliser la technique du *forwarding* pour construire une loi de commande $u_s(\cdot)$ satisfaisant l'hypothèse A2. Le fait que pour les systèmes *feedforwards* on peut déterminer des lois de commande stabilisantes arbitrairement petites en norme est un point essentiel de la technique que nous proposons : la condition A1.3 joue un rôle fondamental dans la démonstration du Théorème 12.

3. La variable z est une composante non mesurée de l'état et n'intervient pas de façon linéaire dans les équations du système (4.1).

4. Sous les hypothèses du théorème 12, le système $\dot{x} = Mx + h_2(0, u)u$ n'est pas nécessairement localement asymptotiquement stabilisable. Le théorème 12 s'applique par exemple au système de dimension deux

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & z + z^2 \ , \\ \dot{z} & = & -z + u \ , \\ y & = & x \ . \end{array} \right. \tag{4.4}$$

5. Bien des extensions du théorème 12 peuvent être prouvées. En particulier, observons
   • qu'il peut être étendu au cas où la sortie est $y = \sigma(Cx)$, où $\sigma(\cdot)$ est n'importe quelle fonction telle que $v \to v^\top 1igma(v)$ est définie positive et bornée inférieurement sur un voisinage de l'origine par une forme quadratique définie positive,
   • qu'il peut être étendu au cas où les fonctions $h_2(\cdot)$ et $B(\cdot)$ dépendent de $y = Cx$.

6. Une étude poussée de la question de la robustesse de la stabilité procurée par la technique de stabilisation que nous proposons n'est pas l'objet de ce chapitre, mais c'est là un sujet qui présente un intérêt certain.

7. Le Théorème 12 peut être appliqué de façon récursive.

4.1.3 Démonstration du théorème 12

Commençons par introduire le système auxiliaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\hat{x}} & = & M\hat{x} + h_1(\hat{z})\hat{z} + h_2(\hat{z}, u)u - LC(x - \hat{x}) \ , \\ \dot{\hat{z}} & = & A\hat{z} + \phi(\hat{z}) + B(\hat{z}, u)u \ . \end{array} \right. \tag{4.5}$$

Nous allons prouver le résultat suivant

Proposition 13 *Sous les hypothèses du théorème 12, le système (4.5) est un observateur pour le système (4.1) pourvu que l'entrée u soit plus petite en norme qu'un nombre réel positif qui ne dépend que de A, $\phi(\cdot)$ et $B(\cdot)$.*

Preuve.
Première étape : équation d'erreur.

Introduisons les notations $(\tilde{x}, \tilde{z}) = (x - \hat{x}, z - \hat{z})$. L'équation d'erreur est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\tilde{x}} & = & (M + LC)\tilde{x} + h_1(\tilde{z} + \hat{z})(\tilde{z} + \hat{z}) - h_1(\hat{z})\hat{z} + [h_2(\tilde{z} + \hat{z}, u) - h_2(\hat{z}, u)]u \ , \\ \dot{\tilde{z}} & = & A\tilde{z} + \phi(\tilde{z} + \hat{z}) - \phi(\hat{z}) + [B(\tilde{z} + \hat{z}, u) - B(\hat{z}, u)]u \ . \end{array} \right. \tag{4.6}$$

Deuxième étape : pas d'explosion en temps fini.

On impose a priori à u d'être plus petite en norme que $\mu_{2,a} \in (0, \mu_{2*}]$. Alors, l'hypothèse A1.3 garantit que $z(t)$ et $\hat{z}(t)$ sont définies pour tout $t \geq 0$. Donc les sous-systèmes en x de (4.1) et de (4.5) sont des systèmes linéaires en présence de termes additifs définis pour tout $t \geq 0$. En conséquence, le phénomène d'explosion en temps fini ne se produit pas pour ces systèmes. Par conséquent, les solutions de (4.5) (4.6) sont définies pour tout $t \geq 0$.

Troisième étape : convergence de $\tilde{z}(t)$.

D'après l'hypothèse A1.2, la fonction $\phi(\cdot)$ est d'ordre 2 à l'origine. Par conséquent, il existe $\mu_{1,b} \in (0, 1]$ et $c > 0$ tels que pour tout $\hat{z}$ et z satisfaisant $|\hat{z}| \ \leq \ \mu_{1,b}$, $|z| \ \leq \ \mu_{1,b}$ et pour tout u plus petit en norme que $\mu_{2,a}$ les inégalités

$$|2\tilde{z}S\,[\phi(z) - \phi(\hat{z})]\,| \leq \frac{1}{4}|\tilde{z}|^2 \ , \tag{4.7}$$

$$|2\tilde{z}S\,[B(z, u) - B(\hat{z}, u)]\,u| \ \leq \ c|\tilde{z}|^2|u| \ , \ c = 2|S| \sup_{|Z| \leq 3, |u| \leq 1} \left| \frac{\partial B}{\partial z}(Z, u) \right| \tag{4.8}$$

sont satisfaites. La constante c dépend de la borne supérieure de la dérivée première de B sur un voisinage de $(0, 0)$ mais pas de $\mu_{1,b}$ et de $\mu_{2,a}$. D'un autre côté, nous déduisons de A1.3 qu'il existe $\mu_{2,b} \in (0, \mu_{2,a}]$ tel que pour tout u satisfaisant $|u| \leq \mu_{2,b}$ il existe $T_b > 0$ tel que

$$|\hat{z}(t)| \ \leq \ \mu_{1,b}, \ |z(t)| \ \leq \ \mu_{1,b} \ , \ \forall t \ \geq \ T_b \ . \tag{4.9}$$

De plus, en choisissant $\mu_{2,b}$ tel que $\mu_{2,b} \leq \frac{1}{4c}$, nous avons

$$c|u| \ \leq \ \frac{1}{4} \ . \tag{4.10}$$

En combinant (4.2), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), nous déduisons que

$$\dot{Q} \ \leq \ -\frac{1}{2}|\tilde{z}|^2 \ , \ \forall t \ \geq \ T_b \tag{4.11}$$

où $Q(\tilde{z})$ est la forme quadratique définie positive

$$Q(\tilde{z}) \ = \ \tilde{z}^\top S\tilde{z} \ . \tag{4.12}$$

De (4.11), on peut déduire qu'il existe des nombres réels D_1, a_1 tels que

$$|\tilde{z}(t)| \ \leq \ D_1 e^{-a_1 t} \ , \ \forall t \ \geq \ 0 \ . \tag{4.13}$$

Quatrième étape : convergence de $\tilde{x}$.

Le sous système en $\tilde{x}$ de (4.6) peut être écrit comme

$$\dot{\tilde{x}}(t) \ = \ \tilde{M}\tilde{x}(t) + \varepsilon(t) \tag{4.14}$$

où la matrice $\tilde{M} = M + LC$ est Hurwitz et $\varepsilon(t)$ est une fonction qui converge exponentiellement vers zéro. Il s'en suit immédiatement que les solutions du sous système en $\tilde{x}$ de (4.6) satisfont, pour des nombres réels positifs D_2 et a_2

$$|\tilde{x}(t)| \ \leq \ D_2 e^{-a_2 t} \ , \ \forall t \ \geq \ 0 \ . \tag{4.15}$$

Ceci termine la preuve de la proposition 13. ∎

Conclusion de la preuve du théorème 12. L'hypothèse A2 garantit l'existence d'une loi de commande $u_s(x,z)$ plus petite en norme que $\mu_{2,b}$ telle que les solutions de (4.3) en boucle fermée avec $u_s(x,z)$ convergent vers l'origine quand $d(t)$ est une fonction de classe C^1 qui appartient à $L^1([0,+\infty[)$ et converge vers zéro. D'un autre côté, en choisissant $u_s(\hat{x},\hat{z})$ comme loi de commande, la proposition 13 s'applique. Il s'en suit que les inégalités (4.13) et (4.15) sont satisfaites et que $\tilde{x}(t)$ est une fonction de classe C^1 qui appartient à $L^1([0,+\infty[)$ et converge vers zéro. On peut donc conclure de l'hypothèse A.2 que

$$\lim_{t\to+\infty} \hat{x}(t) \ = \ 0 \ , \ \lim_{t\to+\infty} \hat{z}(t) \ = \ 0 \ . \tag{4.16}$$

Donc les solutions du système (4.1) en boucle fermée avec $u_s(\hat{x},\hat{z})$ convergent vers zéro. Pour finir, l'exponentielle stabilité locale du système en boucle fermée peut être établie en montrant l'exponentielle stabilité de l'approximation linéaire du système en boucle fermée. Ceci termine la démonstration. ∎

4.2 Fonction de Lyapunov stricte pour des systèmes satisfaisant les conditions de La Salle

Nous avons mentionné dans la section 3.4 certains des avantages inhérents à la connaissance de fonctions de Lyapunov strictes. Malheureusement, dans bien des cas, aucune expression explicite de fonction de Lyapunov stricte n'est connue alors que des expressions explicites de Lyapunov non strictes le sont. Par exemple, les fonctions de stockage (*storage functions*) des systèmes passifs sont ou peuvent en général être transformées en des fonctions de Lyapunov ne pouvant être rendues strictes par un choix approprié de loi de commande. Un autre exemple de famille de systèmes pour lesquels des fonctions de Lyapunov non strictes peuvent être déterminées sans difficulté est celle des systèmes stabilisés au moyen d'une approche de type Jurdjevic-Quinn : voir [FP1, JQ, MM, OV]. L'intérêt qu'il y a à pouvoir construire des fonctions de Lyapunov strictes en utilisant la connaissance de fonctions de Lyapunov non strictes apparaît donc.

Dans cette partie, nous allons présenter une construction de fonctions de Lyapunov strictes pour des systèmes non linéaires généraux et utiliserons certaines des idées qui se trouvent dans [FP1]. Les conditions sur les crochets de Lie sous lesquelles nous menons notre construction sont très similaires aux conditions de [FP1] mais notre résultat ne nécessite pas, pour être applicable, que le système que nous considérons possède une quelconque propriété d'homogénéité.

4.2.1 Résultat principal

Nous considérons les systèmes de la forme :

$$\dot{x} \ = \ f(x), \tag{4.17}$$

avec $f(0) = 0$. Notre construction va utiliser un système auxiliaire de la forme :

$$\dot{x} \;=\; f_\lambda(x) \;:=\; \lambda(V(x))f(x) \;, \tag{4.18}$$

où $\lambda : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ est une fonction strictement positive que nous définirons plus tard et $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une fonction définie positive.

Théorème 14 *Supposons qu'il existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfaisant les conditions suivantes :*
(i) $V(\cdot)$ est une fonction de Lyapunov non stricte pour le système (4.17) ;
(ii) Il existe $\ell \in N$ tel que pour tout $x \neq 0$ il existe $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ tel que $L_f^i V(x) \neq 0$.
Alors, il existe une fonction strictement positive et non croissante $\lambda : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ telle que la fonction

$$U(x) = V(x)\left[1 + V(x) - \sum_{i=1}^{\ell-1} L_{f_\lambda}^i V(x) \left(L_{f_\lambda}^{i+1} V(x)\right)^{3^i}\right] \tag{4.19}$$

est une fonction de Lyapunov stricte pour le système (4.17), où $f_\lambda = f_\lambda(x) := \lambda(V(x))f(x)$. N'importe quelle fonction $\lambda(\cdot)$ telle que

$$|L_{f_\lambda}^j V(x)| \;\leq\; \frac{1}{3^{\ell+1}}, \quad \forall j \in \{1, \ldots, \ell+1\} \;,\; \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{4.20}$$

peut être sélectionnée.

Discussion du Théorème 14.
• Si le système (4.17) est analytique, globalement asymptotiquement stable et vérifie la condition (i) du théorème 14 avec une fonction $V(\cdot)$ analytique, on peut prouver que la condition (ii) est vérifiée sur un ensemble compact arbitrairement grand privé de l'origine. Nous ne donnerons pas la démonstration de ce résultat.
• Nous notons que les conditions (i) et (ii) du théorème 14 ne sont pas nécessaires pour la stabilité asymptotique globale du système. En effet, il peut exister un système (4.17) qui satisfait la condition (i) mais pas la condition (ii) et dont la stabilité asymptotique globale peut être prouvée par le principe d'invariance de LaSalle. L'exemple suivant, qui se trouve dans [OV], illustre cette situation. Le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_2, \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 - x_2 B(x_2), \end{array} \right. \tag{4.21}$$

où B est la fonction régulière définie par $B(s) = e^{-\frac{1}{s^2-1}}$ quand $|s| \neq 1$ et $B(1) = B(-1) = 0$ est d'après le principe d'invariance de La Salle, globalement asymptotiquement stable (voir [OV]). Notons que le point (i) du théorème 14 est satisfait avec

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

puisque

$$\dot{V} = -2x_2^2 B(x_2) \;.$$

La condition (ii) du théorème 14 n'est pas vérifiée puisque pour $x^* = (0\ 1)^T$ et pour tout $i \in N$ nous avons que $L_f^i V(x^*) = 0$.

4.2.2 Preuves des résultats principaux

Lemmes techniques. Nous commençons par énoncer, sans les démontrer, deux lemmes techniques qui seront utiles pour démontrer le théorème 14.

Lemme 15 *Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction définie positive et $\lambda : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ une fonction strictement positive. Alors, ce qui suit est vérifié :*

1. *$V(\cdot)$ est une fonction de Lyapunov stricte (resp. non stricte) pour le système (4.17) si et seulement si c'est une fonction de Lyapunov stricte (resp. non stricte) pour le système (4.18).*

2. *Le système (4.17) satisfait la condition (ii) du théorème 14 si et seulement si le système (4.18) satisfait la condition (ii) du théorème 14*

Lemme 16 *Considérons* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *et* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. *Supposons que pour un certain* $\mathcal{L} \in N$ *et tout* $i \in \{1, \ldots, \mathcal{L}\}$ *il existe* $\kappa_i : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ *tel que*

$$|L_f^i V(x)| \leq \kappa_i(V(x)) \ , \quad \forall i \in \{1, \ldots, \mathcal{L}\}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ . \tag{4.22}$$

Alors, un nombre positif c *étant donné, on peut construire une fonction strictement positive non croissante* $\lambda : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ *telle que* $f_\lambda(x) := \lambda(V(x)) f(x)$ *satisfait*

$$|L_{f_\lambda}^i V(x)| \leq c, \quad \forall i \in \{1, \ldots, \mathcal{L}\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \ . \tag{4.23}$$

Preuve du théorème 14. Les lemmes 16 et 16 permettent de ramener la démonstration du théorème 14 à la construction d'une fonction de Lyapunov stricte pour le système (4.18) où λ est une fonction telle que la condition (4.20) est vérifiée.

Nous montrons maintenant que la fonction U définie (4.19) est une fonction de Lyapunov stricte pour le système (4.18) qui satisfait les conditions (i) et (ii) du théorème 14 et pour laquelle (4.20) est vérifiée.

Pour simplifier les notations, nous introduisons les fonctions

$$M_i(x) \ := \ -L_{f_\lambda}^i V(x) \left(L_{f_\lambda}^{i+1} V(x)\right)^{3^i} , \quad i \in \{1, \ldots, \ell-1\} \tag{4.24}$$

et

$$S(x) \ := \ V(x) + \sum_{i=1}^{\ell-1} M_i(x) \ . \tag{4.25}$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell-1\}$, la dérivée de $M_i(\cdot)$ le long des solutions de (4.18) est :

$$\dot{M}_i\Big|_{(4.18)} = -\left(L_{f_\lambda}^{i+1} V(x)\right)^{3^i+1} - 3^i \cdot L_{f_\lambda}^i V(x) \left(L_{f_\lambda}^{i+1} V(x)\right)^{3^i-1} L_{f_\lambda}^{i+2} V(x) \ . \tag{4.26}$$

Notons que pour n'importe quels nombres $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et n'importe quel entier i l'inégalité $ab^{3^i-1} \leq \frac{1}{2} b^{3^i+1} + \frac{1}{2}(2a)^{\frac{3^i+1}{2}}$ est vérifiée. En utilisant cette inégalité avec $b = |L_{f_\lambda}^{i+1} V(x)|$ et $a = 3^i \cdot |L_{f_\lambda}^i V(x)||L_{f_\lambda}^{i+2} V(x)|$, nous en déduire pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell-1\}$:

$$\dot{M}_i\Big|_{(4.18)} \ \leq \ -\tfrac{1}{2}\left(L_{f_\lambda}^{i+1} V(x)\right)^{3^i+1} + \tfrac{1}{2}\left[2 \cdot 3^i \cdot |L_{f_\lambda}^i V(x)| \cdot |L_{f_\lambda}^{i+2} V(x)|\right]^{\frac{3^i+1}{2}} \ . \tag{4.27}$$

Par conséquent, grâce à (4.25), (4.27) et (4.20), on peut conclure que

$$\dot{S}\Big|_{(4.18)} \ \leq \ L_{f_\lambda} V(x) - \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell-1} \left(L_{f_\lambda}^{i+1} V(x)\right)^{3^i+1} + P(x) \tag{4.28}$$

avec

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{1}{2} \left[2 \cdot 3^i \frac{1}{3^{\ell+1}} |L_{f_\lambda}^i V(x)|\right]^{\frac{3^i+1}{2}} \ . \tag{4.29}$$

On peut prouver facilement que

$$\begin{aligned} P(x) \ &= \ \tfrac{1}{2}\left[2 \cdot 3 \tfrac{1}{3^{\ell+1}} |L_{f_\lambda} V(x)|\right]^2 + \sum_{i=2}^{\ell-1} \frac{1}{2} \left[2 \cdot \frac{3^i}{3^{\ell+1}} |L_{f_\lambda}^i V(x)|\right]^{\frac{3^i+1}{2}} \\ &\leq \ \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 (L_{f_\lambda} V(x))^2 + \sum_{i=1}^{\ell-2} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3^{i+1}+1}{2}} |L_{f_\lambda}^{i+1} V(x)|^{\frac{3^{i+1}+1}{2}} \ . \end{aligned} \tag{4.30}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}\dot{S}\Big|_{(4.18)} \quad \leq \quad & L_{f_\lambda}V(x) - \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell-1}\left(L_{f_\lambda}^{i+1}V(x)\right)^{3^i+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 (L_{f_\lambda}V(x))^2 \\ & + \sum_{i=1}^{\ell-2}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3^{i+1}+1}{2}} |L_{f_\lambda}^{i+1}V(x)|^{\frac{3^{i+1}+1}{2}} \ .\end{aligned} \tag{4.31}$$

La condition (i) du théorème 14 et le point 1 du Lemme 15 garantissent que $L_{f_\lambda}V(x)$ est semi-définie négative. De plus, puisque $\frac{3^{i+1}+1}{2} \geq \max\{5, 3^i+1\}$ et $|L_{f_\lambda}^i V(x)| \leq 1$ pour tout $i = 1, 2, \dots, \ell+1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\dot{S}\Big|_{(4.18)} \quad \leq \quad & \tfrac{1}{2}L_{f_\lambda}V(x) - \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell-1}\left(L_{f_\lambda}^{i+1}V(x)\right)^{3^i+1} + \sum_{i=1}^{\ell-2}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(L_{f_\lambda}^{i+1}V(x)\right)^{3^i+1} \\ \leq \quad & \tfrac{1}{2}L_{f_\lambda}V(x) - \tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{\ell-1}\left(L_{f_\lambda}^{i+1}V(x)\right)^{3^i+1} \ .\end{aligned} \tag{4.32}$$

En observant que la fonction $U(x)$ définie en (4.19) peut être écrite comme :

$$U(x) \ = \ V(x)(1 + S(x)) \tag{4.33}$$

et est une foncion définie positive, on peut aisément achever la démonstration.

Chapitre 5

Systèmes non linéaires à retard

L'étude des systèmes linéaires à retard est depuis longtemps un sujet populaire. Cela résulte du fait que la présence de retards est fréquemment constatée en pratique et que celle-ci peut affecter les performances des systèmes de façon très importante. Depuis quelques années, de nombreux résultats d'analyse de stabilité ou de stabilisation pour des systèmes non linéaires à retard ont été obtenus. En raison de la difficulté inhérente à ces problèmes, beaucoup reste à faire dans ce domaine. Le présent chapitre présente certains résultats de stabilisation de systèmes non linéaires ayant des entrées retardées, qui furent parmi les premier obtenus sur ce sujet.

Dans une première partie, nous allons donner divers résultats de stabilisation par commande saturée pour des oscillateurs ayant un retard ponctuel dans l'entrée (voir [14], [40]). Notons qu'en raison de l'aspect saturé de la commande, cette famille est une famille de systèmes non linéaires. Dans une deuxième partie, nous résoudrons le problème de la stabilisation asymptotique globale de systèmes *feedforward* non linéaires au moyen de commandes saturées ayant un retard ponctuel dans l'entrée (voir [18], [60]). Dans une troisième partie, nous réaliserons une adaptation de la technique d'ajout d'intégrateurs au problème de l'obtention de lois de commandes globalement asymptotiquement stabilisantes pour des systèmes non linéaires ayant un retard ponctuel arbitrairement grand dans l'entrée (voir [11], [64]).

5.1 Oscillateur

La famille des systèmes linéaires décrits par

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-\tau) \tag{5.1}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\tau \geq 0$ est un retard, $u \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée et la condition initiale est

$$x(\theta) = \phi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]$$

est une des plus simples familles de systèmes à retards. Quoiqu'il en soit, ces systèmes permettent de décrire bon nombre de phénomènes tels que le transport de l'information et de produits, une lenteur de calculs, des retards inhérents aux actionneurs.

La commande de ces systèmes peut être effectuée au moyen de techniques bien connues qui prennent en compte d'une façon explicite ou implicite une prédiction de l'état au temps $t+\tau$. Une de celles qui sont les plus utilisées sont par exemple le prédicteur de Smith [S2], [P] et les techniques d'assignation de spectre [MO], [A2]. Ces approches ont en commun pour défaut de ne pas permettre de stabiliser des systèmes instables et ce en raison de l'instabilité de certaines prédictions [MDS]. Comme cela est montré dans [MLC], il est possible de remédier à ce problème en introduisant un réajustement périodique du prédicteur.

L'intérêt des commandes saturées est bien connu. Il est connu que si un système linéaire commandable a des entrées saturées et si ses pôles sont dans le demi plan droit ouvert, alors seul un résultat de stabilisation local peut être obtenu mais que si ses pôles sont dans le demi plan gauche fermé on peut déterminer des lois de commandes globalement asymptotiquement stabilisantes. Dans ce dernier cas, ainsi que cela est monté dans [SSY], le problème peut être décomposé en deux sous problèmes fondamentaux, à savoir la commande de chaînes d'intégrateurs de longueur finie arbitraire et la commande d'oscillateurs de multiplicité arbitraire finie. Des solutions à ce problème, dans le contexte des systèmes sans retard, se trouvent dans [T6], [SSY], [MP1].

De tout ceci, il résulte que l'étude des systèmes linéaires dont les entrées sont à la fois à retard et bornées, est motivée par bien des domaines applicatifs.

Nous allons nous intéresser à la stabilisation d'un simple oscillateur ayant un retard arbitrairement grand dans l'entrée :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t)\ , \\ \dot{x}_2(t) & = & -x_1(t) + u(t-\tau)\ . \end{array}\right. \tag{5.2}$$

Nous limitons notre analyse au cas où la fréquence est égale à 1 et ce dans un souci de simplification. Toutefois, tous nos résultats peuvent être adaptés facilement à n'importe quel système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & \alpha x_2(t)\ , \\ \dot{x}_2(t) & = & -\beta x_1(t) + u(t-\tau)\ , \end{array}\right. \tag{5.3}$$

où α et β sont des nombres réels strictement positifs ou strictement négatifs car ce système peut être transformé en un système (5.2) par changement de coordonnées et d'échelle de temps.

A notre connaissance, la question de la stabilisation d'un oscillateur à retard a été présentée pour la première fois dans [M5]. Des commentaires supplémentaires sur les systèmes à retard oscillants se trouvent dans [A1, AK].

La nature des oscillateurs est très différente de celle des chaînes d'intégrateurs : par exemple, quand l'entrée est zéro, les solutions des oscillateurs sont des fonctions trigonométriques du temps alors que celles des intégrateurs sont des fonctions polynômiales du temps. Aussi la technique de démonstration que nous utilisons est elle très différente de celle de [MMN1] développée pour les chaînes d'intégrateurs ayant des entrées retardées bornées basée sur les commandes saturées introduites dans [T6] qui ne nécessite que la connaissance d'une borne supérieure sur le retard. Dans le cas des oscillateurs, nous pouvons tirer profit des propriétés des solutions explicites du système sans commande pour déterminer des expressions de lois de commande qui dépendent explicitement de la valeur exacte du retard. La démonstration du résultat emploie le théorème de Lyapunov-Razumikhin (voir le théorème 9 de la section 3.3.2). La caractéristique principale de notre construction de loi de commande pour des retards arbitrairement grands est qu'elle nous permet de déterminer une famille de lois de commande d'état globalement asymptotiquement stabilisantes dans laquelle se trouvent des éléments en norme arbitrairement petits. La ré-interprétation de ce résultat dans le contexte de la stabilisation par retour de sortie conduit au résultat suivant : pour *toute* sortie linéaire non triviale, on peut trouver un retard arbitrairement grand pour lequel le problème de la stabilisation asymptotique globale d'un oscillateur par commande bornée peut être traité. Dans ce qui suit, nous allons utiliser la notation suivante : par $\sigma(\cdot)$, nous notons une saturation de classe C^1, impaire et croissante telle que

$$-s \leq \sigma(s) \leq s, 0 \leq \sigma'(s) \leq 1 \quad \forall s \in \mathbb{R}\ ,\ \sigma(s) = \tfrac{3}{2} \quad \forall s \geq 2\ ,\ \sigma(s) = s \quad \forall s \in [0,1]\,. \tag{5.4}$$

5.1.1 Stabilisation par loi de commande à retard bornée

Nous établissons tout d'abord un premier résultat général concernant la stabilisation asymptotique globale de systèmes linéaires en utilisant une loi de commande qui contient des éléments distribués. En suite, nous particularisons ce résultat au cas de l'oscillateur. Pour finir, nous exploitons ce dernier résultat pour déterminer des lois de commande sans élément distribué.

Lois de commande distribuées

Lemme 17 *Considérons un système linéaire commandé avec un retard dans l'entrée*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-\tau) \tag{5.5}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$*, le retard dans l'entrée est* $\tau \geq 0$*, et les conditions initiales sont*

$$x(\theta) = \phi(\theta) \ , \quad \theta \in [-\tau, 0]$$

où $\phi(\cdot)$ *est une fonction continue. Alors une loi de commande bornée*

$$u(t) = \xi(x) \tag{5.6}$$

stabilise globalement asymptotiquement le système (5.5) quand $\tau = 0$ *si et seulement si la loi de commande distribuée*

$$u(t-\tau) = \xi\left(e^{A\tau}x(t-\tau) + \int_{t-\tau}^{t} e^{(t-s)A}Bu(s-\tau)ds\right) \tag{5.7}$$

stabilise globalement asymptotiquement le système (5.5).

Preuve. Le résultat est une conséquence directe de l'égalité

$$x(t) = e^{A\tau}x(t-\tau) + \int_{t-\tau}^{t} e^{A(t-s)}Bu(s-\tau)ds$$

qui est satisfaite pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Loi de commande distribuée pour l'oscillateur

Nous particularisons maintenant le résultat précédent au cas d'un oscillateur. Rappelons tout d'abord un résultat très simple

Lemme 18 *Considérons le système*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \ , \\ \dot{x}_2(t) & = & -x_1(t) + u \ , \end{array} \right. \tag{5.8}$$

où u *est l'entrée. Ce système est globalement asymptotiquement stabilisé par la loi de commande bornée*

$$u(x_1(t), x_2(t)) = -\varepsilon\sigma(x_2(t)) \tag{5.9}$$

où ε *est un paramètre positif et* $\sigma(\cdot)$ *est une fonction bornée définie en (5.4).*

La formule de Cauchy pour l'oscillateur

$$x_1(t) \quad = \quad \cos(\tau)x_1(t-\tau) + \sin(\tau)x_2(t-\tau) - \int_{t-\tau}^{t} \sin(s-t)u(s-\tau)ds \ , \tag{5.10}$$

$$x_2(t) \quad = \quad -\sin(\tau)x_1(t-\tau) + \cos(\tau)x_2(t-\tau) - \int_{t-\tau}^{t} \cos(s-t)u(s-\tau)ds \ , \tag{5.11}$$

et le lemme 17 impliquent que la loi de commande à retard distribué

$$u(t-\tau) = -\varepsilon\sigma\left(-\sin(\tau)x_1(t-\tau) + \cos(\tau)x_2(t-\tau) - \int_{t-\tau}^{t} \cos(s-t)u(s-\tau)ds\right) \tag{5.12}$$

stabilise globalement asymptotiquement le système (5.2).

Loi de commande d'état pour l'oscillateur

Dans la loi de commande (5.12) se trouvent des éléments distribués. L'implémentation de tels termes au moyen d'approximations numériques est coûteuse en temps et, dans certains cas, peut conduire à l'instabilité [MDS]. On peut observer qu'en (5.11) le terme distribué est d'ordre ε alors que l'autre terme ne dépend pas de ε, ce qui implique que la loi de commande (5.12) est égale à un terme d'ordre ε plus un terme distribué d'ordre ε^2. Cette remarque nous conduit à conjecturer que lorsque ε décroît, l'influence du terme distribué décroît aussi. Aussi une question se pose-t-elle de façon naturelle : celle de savoir si la stabilité est ou n'est pas préservée lorsque ε est petit et les termes intégraux négligés, c'est à dire si, au lieu de (5.12), la loi de commande

$$u(t-\tau) = -\varepsilon\sigma(-\sin(\tau)x_1(t-\tau) + \cos(\tau)x_2(t-\tau)) \tag{5.13}$$

est utilisée. Le résultat principal de ce travail présenté maintenant donne une réponse à cette question.

Théorème 19 *Soit τ un nombre réel positif. L'origine du système (5.2) est globalement asymptotiquement stabilisée par la loi de commande*

$$u(x_1, x_2) = -\varepsilon\sigma(-\sin(\tau)x_1 + \cos(\tau)x_2) \tag{5.14}$$

où

$$\varepsilon \in \left(0, \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{324\tau^2}, \frac{1}{40\tau}\right\}\right] \tag{5.15}$$

et $\sigma(\cdot)$ est une fonction bornée définie en (5.4).

Preuve. Le système (5.2) en boucle fermée avec la loi de commande (5.14) est

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \ , \\ \dot{x}_2(t) & = & -x_1(t) - \varepsilon\sigma\left(x_2(t) + B_2(t)\right) \ , \end{array}\right. \tag{5.16}$$

avec

$$B_2(t) \quad = \quad \varepsilon\int_{t-\tau}^{t} \cos(s-t)\sigma(-\sin(\tau)x_1(s-\tau) + \cos(\tau)x_2(s-\tau))ds \ . \tag{5.17}$$

On peut vérifier facilement que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \ , \\ \dot{x}_2(t) & = & -x_1(t) - \varepsilon\sigma(x_2(t)) + \varepsilon B_2(t)\displaystyle\int_0^1 \sigma'\left(x_2(t) + lB_2(t)\right) dl \ . \end{array}\right. \tag{5.18}$$

Le résultat de stabilité peut en suite être établi au moyen d'une approche de type Lyapunov-Razumikhin reposant sur la fonction

$$U(x_1, x_2) \;=\; \frac{8}{\varepsilon}\int_0^{x_1^2+x_2^2} \sqrt{\frac{l}{\sigma(l)}}dl + x_1x_2 \ . \tag{5.19}$$

5.1.2 Stabilisation par retour de sortie

L'analyse ci-dessus montre que lorsque le retard est τ, des lois de commande ne dépendant que de

$$-\sin(\tau)x_1(t-\tau) + \cos(\tau)x_2(t-\tau)$$

stabilisent l'oscillateur. Cela conduit immédiatement à l'interprétation suivante du théorème 19 dans un contexte de retour de sortie.

Corollaire 20 *Considérons le système*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \ , \\ \dot{x}_2(t) & = & -x_1(t) + u(t) \ , \end{array} \right. \tag{5.20}$$

avec la sortie

$$y = ax_1 + bx_2 \tag{5.21}$$

où a et b sont des nombres réels arbitraires tels que $a^2 + b^2 > 0$. Alors le système est globalement asymptotiquement stabilisé par la loi de commande à retard

$$u(t-\tau) = -\varepsilon\sigma\left(\frac{y(t-\tau)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \tag{5.22}$$

où $\sigma(\cdot)$ est une fonction définie en (5.4), où $\varepsilon \in \left]0, \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{40\tau}, \frac{1}{648\tau^2}\right\}\right]$ et où τ est un nombre réel positif tel que

$$a = -\sqrt{a^2+b^2}\sin(\tau) \ , \ b = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\tau) \ .$$

Un cas particulier intéressant, et peut être surprenant, est celui où la sortie est x_1. En ce cas, le corollaire 20 implique que, bien que le système ne soit pas stabilisable quand le retard est nul, il l'est pour des retards choisis convenablement. L'explication de ce fait est que, pour un retard τ choisi de façon appropriée, la valeur passée de la sortie $x_1(t-\tau)$ donne de l'information sur la valeur présente de $x_2(t)$.

5.2 Systèmes *feedforward*

Le problème de la stabilisation asymptotique globale des systèmes *feedforward* sans retard a été brièvement présenté à la section 3.6. Bien que dans la pratique un retard dans l'entrée lié aux actionneurs, au processus d'information et de transport est souvent présent, la stabilisation asymptotique globale des systèmes *feedforward* avec retard dans l'entrée est un sujet qui reste largement ouvert. Jusqu'ici, seule la stabilisation de deux familles de systèmes *feedforward* linéaires à retard a été réalisée : dans [MMN1] des chaînes d'intégrateurs avec retard dans l'entrée sont stabilisées par des lois de commande bornées et dans la section précédente, nous avons traité le cas de l'oscillateur à retard, système qui peut être classé parmi les systèmes *feedforward*.

Dans cette section, nous apportons une solution au problème de la stabilisation asymptotique globale et exponentielle locale d'une famille de systèmes *feedforward* non linéaires ayant un retard dans l'entrée. Plus précisément, nous considérons les systèmes *feedforward*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) + h_1(x_2(t), \dots, x_n(t)) \ , \\ \dot{x}_2(t) & = & x_3(t) + h_2(x_3(t), \dots, x_n(t)) \ , \\ \vdots & & \\ \dot{x}_{n-1}(t) & = & x_n(t) + h_{n-1}(x_n(t)) \ , \\ \dot{x}_n(t) & = & u(t-\theta) \ , \end{array} \right. \tag{5.23}$$

où $n \geq 2$, $x_i \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ est l'entrée, $\theta \geq 0$ est un retard et où chaque fonction $h_i(\cdot)$ est une fonction de classe C^2 et d'ordre 2 à l'origine. Nous notons par M un nombre réel positif tel que, pour tout $i = 1$ à n,

$$|h_i(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)| \leq M(x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + \dots + x_n^2) \tag{5.24}$$

quand $|x_j| \leq 1, \quad j = i+1, \dots, n$.

Le problème que nous considérons est le suivant :

Problème : *Pour un retard dans l'entrée constant et de taille arbitraire $\theta \geq 0$, déterminer une expression explicite de loi de commande $u(x_1(t-\theta), \dots, x_n(t-\theta))$ qui stabilise globalement asymptotiquement et localement exponentiellement le système (5.23).*

Les outils essentiels que nous utilisons pour résoudre ce problème sont d'une part plusieurs modifications du système (5.23) par changement de coordonnées, d'entrée et d'échelle de temps et, d'un autre côté, la famille de loi de commande proposée dans [T6].

Définitions et remarques préliminaires.

1. Nous notons $\xi(t-\tau)$ par $\bar{\xi}(t)$.

2. Par $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nous désignons une fonction croissante impaire et de classe C^1 telle que

$$0 \leq \sigma'(s) \leq 1 \quad \forall s \in \mathbb{R} \ , \ \sigma(s) = 1 \quad \forall s \geq \tfrac{21}{20} \ , \ \sigma(s) = s \quad \forall s \in \left[0, \tfrac{19}{20}\right] . \tag{5.25}$$

3. Par $\sigma_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nous désignons la fonction

$$\sigma_i(s) := \varepsilon_i \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon_i} s\right) \tag{5.26}$$

où ε_i est un nombre réel positif.

4. Par $p_i : \mathbb{R}^{n-i+1} \to \mathbb{R}$ et $q_i : \mathbb{R}^{n-i+1} \to \mathbb{R}$ nous désignons les fonctions linéaires

$$p_i(a_i, \dots, a_n) := \sum_{j=i}^{n} \frac{(n-i)!}{(n-j)!(j-i)!} a_j \ , \ q_i(a_i, \dots, a_n) := \sum_{j=i}^{n} (-1)^{i+j} \frac{(n-i)!}{(n-j)!(j-i)!} a_j \ . \tag{5.27}$$

5. Pour un vecteur $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, pour tout $1 \leq i \leq j \leq n$, nous notons $\xi_{\{i,j\}}$ le vecteur $\xi_{\{i,j\}} := (\xi_i, \dots, \xi_j) \in \mathbb{R}^{j-i+1}$.

5.2.1 Résultat principal

Dans cette section, une solution au problème présenté dans l'introduction est donnée. Une expression explicite de loi de commande bornée qui stabilise le système (5.23) est donnée dans le théorème établi ci-dessous. Ce résultat sera illustré par un exemple.

Théorème 21 *La loi de commande bornée en norme :*

$$\begin{array}{rcl} u(x) & = & -\frac{L}{Mk^n}\sigma_n(p_n(k^{n-1}\frac{M}{L}x_n) + \sigma_{n-1}(p_{n-1}(k^{n-2}\frac{M}{L}x_{n-1}, k^{n-1}\frac{M}{L}x_n) + \dots \\ & & \dots + \sigma_1(p_1(\frac{M}{L}x_1, \dots, k^{n-2}\frac{M}{L}x_{n-1}, k^{n-1}\frac{M}{L}x_n))) \dots) \end{array} \tag{5.28}$$

où les fonctions $\sigma_i(\cdot)$ and $p_i(\cdot)$ sont les fonctions définies respectivement en (5.26) et (5.27) avec

$$1 = 20\varepsilon_n = 20^2\varepsilon_{n-1} = \dots = 20^n \varepsilon_1 \ , \tag{5.29}$$

$$k \geq \theta \max\left\{16n^3\left[4n\sqrt{n}(1+n^2)^{n-1}+1\right]^2, 4.(20)^{n+1}n(n+2)\right\} \ , \tag{5.30}$$

$$0 < L \leq \min\left\{\frac{k}{8(1+n^2)^{n-1}(n)^3(n!)^3}, \frac{k}{10.(20)^n n(n)^3(n!)^3}, \frac{Mk}{(n+1)!}, M\right\} \tag{5.31}$$

stabilise globalement asymptotiquement et localement exponentiellement le système 5.23.

Remarque 22 *Ce résultat peut être étendu de façon directe au cas où θ est remplacé par une fonction de t inconnue continue et positive, $\theta(t)$, pour laquelle on connaît un nombre réel θ^* tel que pour tout t, $\theta(t) \leq \theta^*$.*

5.2.2 Preuve du théorème 21

Nous allons montrer que le problème principal que nous considérons peut être réduit à un problème auxiliaire plus simple à résoudre et cela grâce à un ensemble de lemmes techniques basés sur des transformations d'échelle de temps, des changements de variables d'état et des changements de lois de commande. Nous les présentons maintenant.

Diverses transformations

Nous proposons une première transformation linéaire qui change les fonctions non linéaires $h_i(\cdot)$ en des fonctions non linéaires qui peuvent être rendues, sur un voisinage de l'origine arbitrairement grand, plus petites qu'une forme quadratique définie positive arbitrairement petite et cela en réglant simplement un paramètre.

Lemme 23 *Le changement de variables d'état et le changement de variable d'entrée linéaires*

$$y_i = \frac{M}{L} x_i,\ w = \frac{M}{L} u \tag{5.32}$$

où M est la constante qui intervient dans (5.24), L est un nombre réel strictement positif arbitrairement petit, $L \leq M$, $i = 1, \ldots, n$, transforme le système (5.23) en

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) &= y_{i+1}(t) + l_i(y_{i+1}(t), \ldots, y_n(t)) \ , & (5.33)\\ \dot{y}_n(t) &= w(t - \theta) \ , & (5.34) \end{aligned}$$

où les fonctions $l_i(\cdot)$ sont définies par

$$l_i(y_{\{i+1,n\}}) := \frac{M}{L} h_i(\frac{L}{M} y_{i+1}, \frac{L}{M} y_{i+2}, \ldots, \frac{L}{M} y_n) \ . \tag{5.35}$$

Chaque fonction $l_i(\cdot)$ satisfait l'inégalité

$$|l_i(y_{\{i+1,n\}})| \leq L(y_{i+1}^2 + y_{i+2}^2 + \cdots + y_n^2) \tag{5.36}$$

où $|y_j| \leq \frac{M}{L}$, pour tout $j \in \{i+1, \ldots, n\}$.

Preuve. Nous n'effectuons pas cette démonstration.

Maintenant, une propriété d'homogénéité vérifiée par les systèmes en forme *feedforward* est résumée par le lemme technique ci-dessous qui est similaire à [MMN1, Lemma 2].

Lemme 24 *Le changement d'échelle de temps $t = ks$, $k \geq 1$ et les nouvelles variables*

$$\begin{aligned} Y_i(s) &= k^{i-1} y_i(ks) \ ,\ i = 1, \ldots, n, & (5.37)\\ v(s) &= k^n w(ks) \ , & (5.38) \end{aligned}$$

transforment le système (5.33), (5.34) en

$$\begin{aligned} \dot{Y}_i(s) &= Y_{i+1}(s) + g_i(Y_{i+1}(s), Y_{i+2}(s), \ldots, Y_n(s)) \ ,\ i = 1, \ldots, n-1, & (5.39)\\ \dot{Y}_n(s) &= v(s - \tau) \ , & (5.40) \end{aligned}$$

avec $\tau = \frac{\theta}{k}$ et

$$g_i(Y_{\{i+1,n\}}) := k^i l_i(k^{-i} Y_{i+1}, k^{-i-1} Y_{i+2}, \ldots, k^{-n+1} Y_n) \ . \tag{5.41}$$

De plus, chaque fonction $g_i(\cdot)$ est telle que

$$\left| g_i(Y_{\{i+1,n\}}) \right| \leq k^{-i} L \left[Y_{i+1}^2 + Y_{i+2}^2 + \cdots + Y_n^2 \right] \tag{5.42}$$

quand $|Y_j| \leq \frac{M}{L} k$ pour tout $j = i+1$ à n.

Remarque 25 *Le lemme 24 met en évidence qu'on peut stabiliser un système (5.23) en présence d'un retard arbitrairement grand par une loi de commande bornée si l'on peut stabiliser par loi de commande bornée le système (5.39), (5.40) qui a dans l'entrée un retard arbitrairement petit.*

Preuve. Nous n'effectuons pas cette démonstration.

Nous rappelons maintenant une transformation linéaire introduite dans [T6] qui va simplifier notre construction de lois de commande stabilisantes. Dans ce qui suit, nous retournons à la notation t pour désigner le temps.

Lemme 26 *[T6] Le changement de coordonnées linéaire*

$$z_i = p_i(Y_i, \dots, Y_n) \ , \tag{5.43}$$

où les fonctions $p_i(\cdot)$ sont définies en (5.27) (dont la transformation inverse est $Y_i = q_i(z_i, \dots, z_n)$ où les fonctions $q_i(\cdot)$ sont définies en (5.27)) transforme le système (5.39), (5.40) en

$$\dot{z}_i(t) = \sum_{j=i+1}^{n} z_j(t) + v(t-\tau) + f_i(z_{i+1}(t), z_{i+2}(t), \dots, z_n(t)), \ i = 1, \dots, n-1 \ , \tag{5.44}$$

$$\dot{z}_n(t) = v(t-\tau) \ , \tag{5.45}$$

où les fonctions $f_i(\cdot)$ sont des fonctions de classe C^2 et d'ordre 2 à l'origine données par

$$f_i(z_{\{i+1,n\}}) = \sum_{j=i}^{n-1} \frac{(n-i)!}{(n-j)!(j-i)!} g_j(q_{j+1}(z_{j+1}, \dots, z_n), \dots, q_n(z_n)) \tag{5.46}$$

telles que

$$|f_i(z_{\{i+1,n\}})| \leq P[z_{i+1}^2 + \cdots + z_n^2] \ , \ P = n^3 (n!)^3 L k^{-1} \tag{5.47}$$

quand $|z_l| \leq \frac{Mk}{L(n+1)!}$, pour tout $l \in \{i+1, \dots, n\}$.

Résultat auxiliaire

Le résultat ci-dessous joue un rôle crucial dans la démonstration du théorème 21.

Théorème 27 *La loi de commande bornée de classe C^1*

$$v_s(z) = -\sigma_n(z_n + \sigma_{n-1}(z_{n-1} + \cdots + \sigma_1(z_1)) \dots) \ , \tag{5.48}$$

où les fonctions $\sigma_i(\cdot)$ sont les fonctions définies en (5.26) avec les constantes ε_i définies en (5.29), stabilise globalement asymptotiquement et localement exponentiellement le système (5.44), (5.45) quand

$$\begin{gathered} 0 \leq \tau \leq \tau_m := \min\left\{ \frac{1}{16n^3\left[4n\sqrt{n}(1+n^2)^{n-1}+1\right]^2}, \frac{1}{4.(20)^{n+1}n(n+2)} \right\} \ , \\ 0 \leq P \leq P_m := \min\left\{ \frac{1}{8(1+n^2)^{n-1}}, \frac{1}{10.(20)^n n} \right\} \ . \end{gathered} \tag{5.49}$$

Preuve du théorème 21

Le résultat est une conséquence directe du théorème 27 et des transformations successives (5.43), (5.37), (5.38) et (5.32).

5.2.3 Preuve du théorème 27

Observons que grâce à la structure *feedforward* du système (5.44), (5.45), toutes les trajectoires de ce système sont définies pour tout $t \geq 0$. Maintenant, nous démontrons par récurrence l'attractivité d'un voisinage de l'origine.
Hypothèse de récurrence. Il existe $T_i > \tau$ tel que pour tout $t \geq T_i$,

$$|z_j(t)| \leq \frac{1}{4}\varepsilon_j \ , \ \forall j \in \{n, \dots, i\} \ . \tag{5.50}$$

Première étape. Considérons le système

$$\dot{z}_n(t) = v_s(t-\tau) = -\sigma_n(\overline{z}_n + \lambda_{n-1}(t)) \tag{5.51}$$

avec

$$\lambda_{n-1}(t) = \sigma_{n-1}(\overline{z}_{n-1} + \cdots + \sigma_1(\overline{z}_1))\dots) \ .$$

Si τ satisfait (5.49), le lemme 28 que nous introduirons et démontrerons à la section 5.2.4, s'applique à (5.51) avec $\varepsilon = \varepsilon_n$, $\lambda(\cdot) = \lambda_{n-1}(\cdot)$. En conséquence, il existe $T_n > \tau$ tel que, pour tout $t \geq T_n$,

$$|z_n(t)| \leq 4\varepsilon_{n-1} \leq \frac{1}{4}\varepsilon_n \ . \tag{5.52}$$

Par conséquent, l'hypothèse de récurrence est satisfaite à la première étape.
Etape i. Nous ne donnons pas ici la démonstration de cette étape. Celle-ci repose sur la supposition que l'hypothèse de récurrence est satisfaite pour tout $j \in \{i, \dots, n\}$ avec $i \in \{2, \dots, n\}$ et sur le lemme 28.
Dernière étape. A la dernière étape de la récurrence toutes les saturations opèrent dans les régions où elles sont linéaires : quand $t \geq T_1 + \tau$, le système en boucle fermée est décrit par les équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{z}_1(t) & = & -\overline{z}_1(t) + [z_2(t) - \overline{z}_2(t) + \cdots + z_n(t) - \overline{z}_n(t)] + f_1(z_{\{2,n\}}(t)) \ , \\ \dot{z}_2(t) & = & -\overline{z}_1(t) - \overline{z}_2(t) + [z_3(t) - \overline{z}_3(t) + \cdots + z_n(t) - \overline{z}_n(t)] + f_2(z_{\{3,n\}}(t)) \ , \\ \vdots & & \\ \dot{z}_{n-1}(t) & = & -\overline{z}_{n-1}(t) - \cdots - \overline{z}_1(t) + z_n(t) - \overline{z}_n(t) + f_{n-1}(z_n(t)) \ , \\ \dot{z}_n(t) & = & -\overline{z}_n(t) - \overline{z}_{n-1}(t) - \cdots - \overline{z}_1(t) \ . \end{array} \right. \tag{5.53}$$

On peut en suite conclure au moyen du lemme 29.

5.2.4 Preuve du lemme 28

Nous établissons maintenant le résultat grâce au quel nous avons démontré le théorème 21

Lemme 28 *Considérons le système*

$$\dot{Z}(t) = -\varepsilon\sigma\left(\frac{1}{\varepsilon}(Z(t-\tau) + \lambda(t))\right) + \mu(t) \tag{5.54}$$

où $Z \in \mathbb{R}$, où $\sigma(\cdot)$ est une saturation appartenant à la classe des saturations définies en (5.25), où ε est un nombre réel strictement positif, où τ est un nombre réel strictement positif et où les fonctions $\mu(t)$ et $\lambda(t)$ sont des fonctions continues bornées respectivement en norme par deux réels positifs notés μ_* et λ_*. Alors, si les conditions

$$\tau \in (0, \frac{1}{12}], \ \lambda_* \in (0, \frac{\varepsilon}{20}] \ , \ \mu_* \in (0, \frac{\varepsilon}{20}] \tag{5.55}$$

sont satisfaites, toutes les solutions sont définies pour tout $t \geq 0$ et il existe $T_c \geq 0$ tel que

$$|Z(t)| \leq 4(\lambda_* + \mu_*) \ , \ \forall t \geq T_c \ . \tag{5.56}$$

Preuve. Observons pour commencer que toutes les solutions de (5.54) sont définies pour tout $t \geq 0$. Considérons la forme quadratique définie positive $V_1(Z) = \frac{1}{2}Z^2$. Sa dérivée le long des trajectoires de (5.54) satisfait

$$\begin{array}{rcl} \dot{V}_1 & \leq & -\varepsilon Z(t)\sigma\left(\frac{1}{\varepsilon}\overline{Z}(t)+\lambda(t))\right)+\mu_*|Z(t)| \\ & \leq & -\varepsilon Z(t)\sigma\left(\frac{1}{\varepsilon}Z(t)\right)+\varepsilon Z(t)\left[\sigma\left(\frac{1}{\varepsilon}Z(t)\right)-\sigma\left(\frac{1}{\varepsilon}(\overline{Z}(t)+\lambda(t))\right)\right]+\mu_*|Z(t)|\ . \end{array} \tag{5.57}$$

Puisque $|\sigma'(\cdot)| \leq 1$, nous avons

$$\begin{array}{rcl} \dot{V}_1 & \leq & -\varepsilon Z(t)\sigma\left(\frac{1}{\varepsilon}Z(t)\right)+|Z(t)|\left|Z(t)-\overline{Z}(t)-\lambda(t)\right|+\mu_*|Z(t)| \\ & \leq & -\varepsilon Z(t)\sigma\left(\frac{1}{\varepsilon}Z(t)\right)+[\tau(\varepsilon+\mu_*)+\lambda_*+\mu_*]|Z(t)|\ . \end{array} \tag{5.58}$$

Les constantes τ, λ_* et μ_* sont telles que $\frac{1}{4}\varepsilon \geq \tau(\varepsilon+\mu_*)+\lambda_*+\mu_*$. En conséquence, lorsque $|Z(t)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$, alors $\dot{V}_1 \leq -\frac{\varepsilon}{2}Z(t)\sigma\left(\frac{1}{\varepsilon}(Z(t))\right) \leq -\frac{\varepsilon^2}{4}\sigma\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. Il s'en suit qu'il existe $T > 0$ tel que

$$|Z(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ ,\ \forall t \geq T\ . \tag{5.59}$$

La démonstration peut ensuite être achevée en observant que pour tout $t \geq T+\tau$ les solutions sont solution du système linéaire

$$\dot{Z} = -Z(t-\tau)+\frac{\mu-\lambda}{\varepsilon}\ .$$

5.2.5 Propriété de robustesse

Nous établissons une propriété de robustesse pour les systèmes linéaires à retard. Ce résultat est plus général que celui qui nous a été nécessaire pour démontrer le théorème 27. Notons qu'il présente de l'intérêt en lui même.

Lemme 29 *Considérons le système*

$$\dot{x}(t) = A_1x(t)+A_2x(t-\tau)+\varphi(x(t)) \tag{5.60}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et introduisons un ensemble d'hypothèses :
H1. *Il existe une matrice Q, symétrique et définie positive telle que l'inégalité*

$$Q(A_1+A_2)^\top+(A_1+A_2)Q \leq -I \tag{5.61}$$

où I est l'identité, est satisfaite.
H2. *Il existe une constante γ telle que, pour tout x,*

$$|\varphi(x)| \leq \gamma|x|\ . \tag{5.62}$$

H3. *Les inégalités*

$$0 \leq \tau \leq \min\left\{\frac{1}{16a^2[4aq+1]^2}, 2\right\}\ ,\ 0 \leq \gamma \leq \frac{1}{8q} \tag{5.63}$$

où $q > 0$ et $a \geq 0$ sont telles que $|Q| \leq q$, $|A_1| \leq a$ et $|A_2| \leq a$ sont satisfaites.

Supposons que le système (5.60) satisfait les hypothèses H1, H2, H3. Alors le système (5.60) est globalement exponentiellement stable.

La démonstration de ce résultat repose sur la construction d'une fonctionnelle de type Lyapunov-Krasovskii.

5.3 *Backstepping* à retard

L'objectif de cette partie est d'étendre la technique d'ajout d'intégration, brièvement présentée dans la section 3.5, au cas de systèmes de forme *feedback* ayant un retard ponctuel dans l'entrée. Plus précisément, nous allons donner des conditions suffisantes garantissant qu'un système non linéaire de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & f(x(t)) + g(x(t))z(t), \\ \dot{z}(t) & = & u(t-\tau) + h(x(t-\tau), z(t-\tau)), \end{array}\right. \tag{5.64}$$

où $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $z \in \mathbb{R}$, sont les composantes de l'état, où $u \in \mathbb{R}$ est l'entrée et où τ est un réel positif, est globalement asymptotiquement stabilisable par une loi de commande de classe C^1. Ces conditions garantissent que le sous système en x de (5.64), avec z considéré comme une entrée virtuelle, est globalement asymptotiquement stabilisable par une loi de commande ayant pour retard τ et que, pour une certaine famille de lois de commande, le phénomène d'explosion en temps fini ne se produit pas. Notre approche a la spécificité de reposer sur la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii : voir [K4, HV] et la section 3.3.2. Bien que fréquemment employées dans le cadre des systèmes linéaires, de façon surprenante, elles le sont assez peu dans celui de la commande des systèmes non linéaires à retard. Nous allons montrer qu'elles peuvent pourtant utilement l'être et ce, par exemple, dans le cadre de la commande de systèmes qui ne sont pas localement exponentiellement stabilisables. L'exemple que nous présenterons dans la section 5.6 illustre cela.

5.4 Lemmes techniques

Cette section est consacrée à la construction de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii pour deux familles de systèmes à retards qui seront cruciales pour la suite.

5.4.1 Premier lemme technique

Le lemme suivant donne des conditions garantissant que le sous système en x de (5.64) avec z comme entrée virtuelle est globalement asymptotiquement stabilisable par une loi de commande $z_s(x(t-\tau))$.

Lemme 30 *Considérons le système*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))z_s(x(t-\tau)) \tag{5.65}$$

où $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, où $f(x), g(x)$ sont des fonctions continues, où $z_s(x)$ est une fonction à valeur réelle de classe C^1 telle que $z_s(0) = 0$ et où τ est un nombre réel positif. Supposons qu'il existe une fonction définie positive, radialement non bornée $V(x)$, une fonction définie positive $W(x)$ et un nombre réel positif $\Omega \geq 8\tau$ tels que les hypothèses suivantes sont satisfaites :
H1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, l'égalité

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)z_s(x)] \;=\; -W(x) \tag{5.66}$$

est vérifiée.
H2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ et $\xi \in C^1([0, 2\tau], \mathbb{R}^{n_x})$, l'inégalité

$$-\frac{1}{4}W(x) - T(x,\xi) - \frac{1}{\Omega}\int_0^{2\tau} W(\xi(l))dl \leq 0 \tag{5.67}$$

avec

$$T(x,\xi) \;=\; \tfrac{\partial V}{\partial x}(x)g(x)\int_\tau^{2\tau} \frac{\partial z_s}{\partial x}(\xi(l))[f(\xi(l)) + g(\xi(l))z_s(\xi(l-\tau))]dl \tag{5.68}$$

est vérifiée.

H3. Pour toute fonction $\xi \in C^1([0,2\tau],\mathbb{R}^{n_x})$, il existe une constante $K_\xi \geq 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ et pour tout $t \in [0,2\tau]$, l'inégalité

$$-\tfrac{1}{2}W(x) + \tfrac{\partial V}{\partial x}(x)g(x)[z_s(\xi(t)) - z_s(x)] \leq K_\xi[V(x)+1] \tag{5.69}$$

est vérifiée.

Alors l'origine de (5.65) est globalement asymptotiquement stable. De plus la dérivée, le long des trajectoires de (5.65), de la fonctionnelle

$$U(x_t) = V(x(t)) + \frac{1}{\Omega}\int_{t-2\tau}^{t}\left(\int_s^t W(x(l))dl\right)ds \tag{5.70}$$

satisfait, pour tout $t \geq 2\tau$,

$$\dot{U}(t) \leq -\frac{1}{2}W(x(t)). \tag{5.71}$$

Preuve. Soit $\varphi \in C^1([-\tau,0],\mathbb{R}^{n_x})$ une condition initiale du système (5.65). Soit $T \in (0,\tau]$ tel que la solution $x(t)$ est définie sur $[0,T)$. Alors, pour tout $t \in [0,T)$, l'égalité

$$\dot{V}(t) \quad = \quad -W(x(t)) + \tfrac{\partial V}{\partial x}(x(t))g(x(t))[z_s(\varphi(t)) - z_s(x(t))] \tag{5.72}$$

est satisfaite. De l'inégalité (5.69) en H3, nous déduisons qu'il existe $K_\varphi > 0$ tel que, pour tout $t \in [0,T)$

$$\dot{V}(t) \leq K_\varphi[V(x(t))+1]. \tag{5.73}$$

Il s'en suit que, pour tout $t \in [0,T)$, l'inégalité

$$V(x(t)) \leq (V(x(0))+1)e^{K_\varphi t} - 1 \tag{5.74}$$

est satisfaite. De cette inégalité, nous pouvons conclure que le phénomène d'explosion en temps fini ne se produit pas dans $[0,\tau]$; les solutions sont donc bien définies sur $[0,\tau]$. En appliquant ce raisonnement de façon successive, on peut prouver que toutes les solutions sont définies sur n'importe quel intervalle $[k\tau,(k+1)\tau]$, où k est un entier, et donc sur $[0,+\infty[$.

Maintenant, observons que, pour tout $t \geq 2\tau$, la dérivée de la fonctionnelle U définie en (5.70) le long des trajectoires de (5.65) satisfait

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{V} - \tfrac{1}{\Omega}\left(\int_{t-2\tau}^{t} W(x(l))dl\right) + \tfrac{2\tau}{\Omega}W(x(t))\\ &= \tfrac{\partial V}{\partial x}(x(t))[f(x(t)) + g(x(t))z_s(x(t-\tau))] - \tfrac{1}{\Omega}\left(\int_{t-2\tau}^{t} W(x(l))dl\right) + \tfrac{2\tau}{\Omega}W(x(t)).\end{aligned} \tag{5.75}$$

De (5.66), nous déduisons que, pour tout $t \geq 2\tau$,

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \left(-1+\tfrac{2\tau}{\Omega}\right)W(x(t)) + \tfrac{\partial V}{\partial x}(x(t))g(x(t))[z_s(x(t-\tau)) - z_s(x(t))] - \tfrac{1}{\Omega}\left(\int_{t-2\tau}^{t} W(x(l))dl\right)\\ &= \left(-1+\tfrac{2\tau}{\Omega}\right)W(x(t)) - \tfrac{1}{\Omega}\left(\int_{t-2\tau}^{t} W(x(l))dl\right) - \tfrac{\partial V}{\partial x}(x(t))g(x(t))\int_{t-\tau}^{t}\lambda(x(s),x(s-\tau))ds\end{aligned} \tag{5.76}$$

avec

$$\lambda(a,b) = \frac{\partial z_s}{\partial x}(a)[f(a) + g(a)z_s(b)]\ . \tag{5.77}$$

De l'inégalité $\Omega \geq 8\tau$ et (5.67), nous déduisons que, pour tout $t \geq 2\tau$, l'inégalité (5.71) est satisfaite. D'autre part, on peut vérifier facilement qu'il existe une fonction μ_1 de classe $\mathcal{K}_\infty$ telle que, pour toute fonction $\phi \in C^1([-2\tau,0],R^{n_x})$, la fonctionnelle U satisfait l'inégalité

$$\mu_1(|\phi(0)|) \leq U(\phi)\ . \tag{5.78}$$

Le théorème de Krasovskii (voir Théorème 11) permet de conclure que l'origine de (5.65) est globalement asymptotiquement stable.

5.4.2 Second lemme technique

Nous donnons sans démonstration le résultat très simple suivant :

Lemme 31 *Considérons le système*

$$\dot{Z}(t) = -\varepsilon Z(t-\tau) \tag{5.79}$$

où $Z \in \mathbb{R}$ et τ et ε sont des nombres réels positifs tels que $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2\tau}\right]$. L'origine de ce système est globalement asymptotiquement stable. De plus, pour tout $t \geq 2\tau$, la dérivée de la fonctionnelle

$$M(Z_t) \;=\; \frac{1}{2}Z(t)^2 + \varepsilon^3\tau \int_{t-2\tau}^{t} \left(\int_s^t Z(l)^2 dl \right) ds \tag{5.80}$$

le long des trajectoires de (5.79) satisfait

$$\dot{M}(t) \leq -\frac{1}{4}\varepsilon Z(t)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon^3\tau \int_{t-2\tau}^{t} Z(s)^2 ds. \tag{5.81}$$

5.5 Résultat principal

Considérons le système non linéaire (5.64) et introduisons deux hypothèses.
Hypothèse A1. Une fonction $V(x)$, définie positive, radialement non bornée et de classe C^1, une fonction $W(x)$ définie positive et continue, un nombre réel $\Omega \geq 8\tau$, une fonction $z_s(x)$, de classe C^1, satisfaisant $z_s(0) = 0$, tels que le système

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))z_s(x(t-\tau)) \tag{5.82}$$

satisfait les hypothèses H1, H2, H3 du lemme 30 sont connues.
Hypothèse A2. Soit C un nombre réel positif. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, les inégalités

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x)\right|^2 \;\leq\; W(x)\;, \;\left|\frac{\partial z_s}{\partial x}(x)g(x)\right| \;\leq\; C \tag{5.83}$$

sont satisfaites.

Théorème 32 *Supposons que le système (5.64) satisfait les hypothèses A1 et A2. Alors le système (5.64) est globalement asymptotiquement stabilisé par la loi de commande*

$$u_s(t) \quad = \quad -\varepsilon(z(t) - z_s(x(t-\tau))) - h(x(t), z(t)) + \tfrac{\partial z_s}{\partial x}(x(t))[f(x(t)) + g(x(t))z(t)] \tag{5.84}$$

où ε est un nombre réel positif tel que $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2\tau}\right]$.

Discussion du théorème 32.
• L'hypothèse A2 permet de construire une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii pour le système (5.64) en boucle fermée avec la loi de commande (5.84) en utilisant les deux fonctionnelles procurées par les lemmes 30 et 31. Notons toutefois que cette hypothèse n'est pas un outil simplement motivé par le souhait de réaliser une construction de fonctionnelle de Lyapunov : elle garantit que le phénomène d'explosion en temps fini ne se produit pas. Elle ne peut être supprimée sans être remplacée par une autre hypothèse jouant un rôle similaire. Nous avons mis ce fait en évidence grâce au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & -x(t) + x(t)^4 z(t), \\ \dot{z}(t) & = & u(t-\tau), \end{array} \right. \tag{5.85}$$

car il est globalement asymptotiquement stabilisé par la loi de commande $u(x,z) = -z - x^5$ quand $\tau = 0$, il n'est pas globalement asymptotiquement stabilisable quand $\tau > 0$ (nous ne donnons pas ici la démonstration de ce résultat technique) et d'autre part, il est de la forme (5.64), satisfait l'hypothèse A1 avec $V(x) =$

$x^2, W(x) = 2x^2, z_s(x) = 0$ mais, quelque soit le choix effectué pour les fonctions $V(x)$ et $z_s(x)$, il ne satisfait pas l'hypothèse A2.

• On peut montrer que l'hypothèse A1 peut être remplacée par l'hypothèse consistant en H1, H3 et l'hypothèse légèrement plus restrictive, mais plus simple, suivant :

Hypothèse H2'. Pour tout $\xi \in C^1([0, 2\tau], \mathbb{R}^{n_x})$, l'inégalité

$$\Omega\tau \int_{\tau}^{2\tau} |H(\xi(l), \xi(l-\tau))|^2 \, dl \leq \int_0^{2\tau} W(\xi(l))dl \tag{5.86}$$

où $H(\cdot)$ est la fonction définie en (5.68) et où Ω est un nombre réel positif tel que $\Omega \geq 8\tau$, est vérifiée.

• Le théorème 32 s'applique aux systèmes qui ne sont pas linéarisables localement. Les hypothèses de ce théorème n'imposent pas même que le sous système en x de (5.64) avec z comme entrée virtuelle soit localement exponentiellement stabilisable. L'exemple que nous traiterons dans la section 5.6 illustre cette remarque.

Preuve du théorème 32.

La démonstration consiste à construire une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii dont la dérivée le long des trajectoires du système (5.64) en boucle fermée avec la loi de commande (5.84) est plus petite qu'une fonction définie négative. Pour simplifier la construction, nous introduisons la variable

$$Z(t) \;=\; z(t) - z_s(x(t-\tau)) \tag{5.87}$$

qui transforme (5.64) en

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}(t) & = & f(x(t)) + g(x(t))(Z(t) + z_s(x(t-\tau))), \\ \dot{Z}(t) & = & u(t-\tau) + \Upsilon(x(t-\tau), x(t-2\tau), Z(t-\tau)), \\ \Upsilon(a,b,c) & = & h(a, c + z_s(b)) - \frac{\partial z_s}{\partial x}(a)[f(a) + g(a)(c + z_s(b))]. \end{array} \right. \tag{5.88}$$

Le choix de la loi de commande $u = u_s(\cdot)$ où $u_s(\cdot)$ est la fonction définie en (5.84), donne

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}(t) & = & f(x(t)) + g(x(t))(Z(t) + z_s(x(t-\tau))), \\ \dot{Z}(t) & = & -\varepsilon Z(t-\tau). \end{array} \right. \tag{5.89}$$

On peut montrer que le phénomène d'explosion en temps fini ne se produit pas pour ce système d'une façon analogue au début de la démonstration du Lemma 30.

Nous étudions maintenant les propriétés de signe de la dérivée de la fonctionnelle U définie en (5.70) le long des trajectoires de (5.89). En utilisant les idées de la démonstration du lemme 30, on peut montrer que, pour tout $t \geq 2\tau$,

$$\dot{U}(t) \quad \leq \quad -\tfrac{1}{2}W(x(t)) + \tfrac{\partial V}{\partial x}(x(t))g(x(t))Z(t) - \tfrac{\partial V}{\partial x}(x(t))g(x(t)) \int_{t-\tau}^{t} \frac{\partial z_s}{\partial x}(x(s))g(x(s))Z(s)ds. \tag{5.90}$$

Grâce à l'hypothèse A2, l'inégalité

$$\dot{U}(t) \quad \leq \quad -\tfrac{1}{4}W(x(t)) + 2\left[Z(t)^2 + C^2\left(\int_{t-\tau}^{t} |Z(s)|ds\right)^2\right] \tag{5.91}$$

est satisfaite. De l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on déduit que

$$\dot{U}(t) \quad \leq \quad -\tfrac{1}{4}W(x(t)) + 2\left[Z(t)^2 + \tau C^2 \int_{t-\tau}^{t} Z(s)^2 ds\right]. \tag{5.92}$$

D'autre part, le lemme 31 s'applique au sous système en Z de (5.89) car $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2\tau}\right]$. Par conséquent, pour tout $t \geq 2\tau$,

$$\dot{M}(t) \leq -\frac{1}{4}\varepsilon Z(t)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon^3\tau \int_{t-2\tau}^{t} Z(s)^2 ds. \tag{5.93}$$

En combinant (5.92) et (5.93), on obtient que la dérivée de la fonctionnelle

$$U_f(x_t, Z_t) \;=\; U(x_t) + KM(Z_t), \tag{5.94}$$

où K est un nombre réel positif tel que $K \geq \max\left\{\frac{12}{\varepsilon}, \frac{4C^2+1}{\varepsilon^3\tau}\right\}$, satisfait l'inégalité

$$\dot{U}_f(t) \leq -\frac{1}{4}W(x(t)) - Z(t)^2. \tag{5.95}$$

Le terme de droite de (5.95) est plus petit qu'une fonction définie négative de $(x(t), Z(t))$.

Pour conclure, on peut facilement montrer qu'il existe deux fonctions γ_1 et Γ_1 de classe $\mathcal{K}_\infty$ telles que, pour tout fonction $(\phi_x, \phi_Z) \in C^1([-2\tau, 0], \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R})$,

$$\gamma_1(|(\phi_x^\top(0), \phi_Z(0))^\top|) \quad\leq\quad U_f(\phi_x, \phi_Z). \tag{5.96}$$

Par conséquent, grâce au théorème de Krasovskii (voir Théorème 11), on peut déduire que l'origine de (5.64) en boucle fermée avec la loi de commande (5.84) est globalement asymptotiquement stable.

5.6 Exemple

Le théorème 32 peut être illustré en montrant qu'il s'applique au système de dimension 2 suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & x(t)z(t), \\ \dot{z}(t) & = & u(t-\tau), \end{array}\right. \tag{5.97}$$

où τ est un nombre réel positif arbitraire, qui possède pour caractéristique de ne pas être localement exponentiellement stabilisable par une commande de classe C^1 et pour lequel les techniques de stabilisation linéaires ne peuvent donc être d'aucun secours pour stabiliser localement asymptotiquement ce système. La fonction de Lyapunov V et la commande fictive z_s

$$V(x) = \eta \ln(1 + x^2)\,,\; z_s(x) = -\frac{\omega x^2}{1 + x^2} \tag{5.98}$$

où η et ω sont des nombres réels strictement positifs peuvent être sélectionnées. La commande qui rend l'origine du système (5.97) globalement asymptotiquement stable alors obtenue est

$$u_s(t) \quad=\quad -\varepsilon\left(z(t) + \tfrac{\omega x(t-\tau)^2}{1+x(t-\tau)^2}\right) - \tfrac{2\varepsilon x(t)^2}{(1+x(t)^2)^2} z(t) \tag{5.99}$$

avec $\omega \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{32\tau}}\right]$ et $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2\tau}$.

Chapitre 6

Systèmes non linéaires variant dans le temps

L'étude des systèmes non linéaires non autonomes est un domaine important de la théorie des systèmes dynamiques et de la théorie de la commande en particulier. Cette étude est motivée en particulier par le fait qu'un problème de suivi de trajectoire pour un système non linéaire autonome peut être reformulé comme un problème de stabilisation de point d'équilibre pour un système non linéaire non autonome appelé équation d'erreur.

Construire des fonctions de Lyapunov strictes pour des systèmes non autonomes est plus difficile que d'en construire pour des systèmes autonomes. On réalise aisément ceci en observant que la dérivée de la fonction $V(x) = x^2$ le long des trajectoires du système de dimension 1

$$\dot{x} = -x$$

est définie négative : $\frac{\partial V}{\partial x}(x)(-x) = -2x^2$ alors que $V(x)$ n'est pas une fonction de Lyapunov stricte pour le système de dimension 1 non autonome et globalement uniformément asymptotiquement stable suivant

$$\dot{x} = -\sin^2(t)x$$

car la fonction

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)(-\sin^2(t)x) = -2\sin^2(t)x^2$$

est égale à zéro quand $t = k\pi$ où k est un entier. Une question très générale se pose donc. En quels cas la connaissance d'une fonction de Lyapunov non stricte pour un système non autonome est elle utile ? Deux réponses essentielles se trouvent dans la littérature. Dans le contexte des systèmes périodiques (et dans un contexte légèrement plus général) le principe d'invariance de LaSalle (voir [BK, L1]) peut être appliqué pour prouver la stabilité asymptotique uniforme de l'origine quand est connue une fonction de Lyapunov ayant une dérivée semi-définie négative. De plus, pour les systèmes non linéaires non périodiques (3.2), Narendra et Annaswamy ont prouvé dans [N1] que s'il existe une fonction de Lyapunov $V(t, x)$ telle que

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x)f(t, x) \leq 0$$

et une constante $T > 0$ telle que, pour tout $t \geq 0$,

$$V(t + T, x(t + T)) - V(t, x(t)) \leq -\gamma(|x(t)|)$$

où $\gamma(\cdot)$ est une fonction de classe $\mathcal{K}$, alors ce système est uniformément asymptotiquement stable.

Des extensions de ce résultat au cas de fonctions de Lyapunov ayant des dérivées le long des trajectoires prenant des valeurs positives et négatives sont présentées dans [AP1, AP2].

L'objectif général que nous avons dans ce chapitre est de proposer une nouvelle réponse à la question posée plus haut : nous allons montrer que la connaissance d'une fonction de Lyapunov non stricte permet, sous certaines conditions, de construire explicitement une fonction de Lyapunov stricte (voir [21], [13], [48]).

6.1 Fonction de Lyapunov stricte : résultat central

L'objectif du résultat qui va suivre peut être résumé ainsi : si pour un système (3.2) non linéaire, non autonome et périodique est connue une fonction de Lyapunov $V(t,x)$, une fonction périodique $q(t)$ et une fonction positive $W(q(t),x)$ telles que

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t,x) \ \leq\ -W(q(t),x) \tag{6.1}$$

où $W(q(t),x)$ est définie positive en x pour tout t appartenant à des intervalles du temps ouverts et non vides *alors on peut construire fonction de Lyapunov stricte pour le système (3.2).*

La construction que nous proposons est motivée principalement par deux faits. D'une part, ainsi que cela a déjà été expliqué, la connaissance de fonctions de Lyapunov est utile dans de nombreux cas. D'autre part, pour de nombreux systèmes (3.2), une fonction de Lyapunov satisfaisant (6.1) est connue. Par exemple, en appliquant le résultat principal de [JN1] au problème du suivi d'une trajectoire périodique d'un système non-holonome en forme chainée, on obtient une telle fonction et il en est généralement de même lorsqu'on met en oeuvre la construction de fonction de Lyapunov proposée dans [MP3].

Observons que la construction que l'on va mener est simple et peut être réalisée facilement en pratique.

Le résultat que nous allons présenter se décompose en deux parties. Tout d'abord, nous construisons une fonction de Lyapunov stricte dans un cas simple. Toutes les idées essentielles de l'approche proposée sont présentées dans cette partie. Dans une seconde partie, nous expliquons comment le résultat peut être étendu à un cas plus général.

6.1.1 Un cas simple

Considérons le système non linéaire non autonome

$$\dot{x} \ =\ f(t,x) \tag{6.2}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et où $f(t,x)$ est une fonction périodique en temps de période $T > 0$. Nous introduisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse A1. Une fonction de Lyapunov $V(t,x)$, périodique en temps et de période T, une fonction $W(x)$, définie positive, et une fonction positive ou nulle $p(t)$, périodique et de période T telles que

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t,x) \ \leq\ -p(t)W(x) \tag{6.3}$$

et deux fonctions $\alpha_i(\cdot)$, $i = 1$ à 2 de classe $\mathcal{K}_\infty$, telles que

$$\alpha_1(|x|) \ \leq\ V(t,x) \ \leq\ \alpha_2(|x|) \tag{6.4}$$

sont connues.

Hypothèse A2. Le nombre réel $\displaystyle\int_0^T p(s)ds$ est strictement positif.

Théorème 33 *Si les hypothèses A1 et A2 sont satisfaites par le système (6.2), on peut déterminer les expressions explicites d'une fonction $\Gamma(\cdot)$ de classe C^1 et de classe $\mathcal{K}_\infty$ et d'une fonction définie positive $\lambda(\cdot)$ de classe C^1, ayant une dérivée première positive, telles que la fonction*

$$U(t,x) \ =\ \Gamma(V(t,x)) + P(t)\lambda(V(t,x)) \tag{6.5}$$

avec

$$P(t) \ = \ \int_t^{t+T} (s-t-T)p(s)ds \tag{6.6}$$

est une fonction de Lyapunov stricte pour le système (6.2).

Discussion du Théorème 33

• Le théorème 33 n'est pas simplement un résultat qui permet de démontrer le théorème plus général qu'est le théorème 34. Dans de nombreuses situations, il peut être appliqué directement : l'exemple de la section 6.2.3 permet de comprendre que lorsque l'approche *backstepping* s'applique à un système non autonome alors, en général, une fonction de Lyapunov satisfaisant les hypothèses A1 et A2 peut être construite. Ceci est aussi vrai lorsque la technique *forwarding* peut être appliquée à un système non autonome.

• On peut étendre le théorème 33 à la famille des systèmes qui ne sont pas périodiques mais pour lesquels il existe $T > 0$ et $\delta > 0$ tels que, pour tout $t \geq 0$, $\displaystyle\int_t^{t+T} p(s)ds \ \geq \ \delta$.

• Quand $V(t,x)$ et $W(x)$ sont bornées inférieurement sur un voisinage de l'origine par une forme quadratique définie positive indépendante du temps, la fonction identité est toujours un choix possible pour $\lambda(\cdot)$.

Preuve.

1. Les propriétés de $U(t,x)$.

On peut montrer facilement que la fonction $P(t)$ est périodique de période T. En conséquence, la fonction $U(t,x)$ définie en (6.5) est périodique de période T et $P(t)$ est bornée en norme par un nombre réel positif P_M. Puisque $\lambda(\cdot)$ est une fonction définie positive, les inégalités

$$\Gamma(V(t,x)) - P_M\lambda(V(t,x)) \leq U(t,x) \leq \Gamma(V(t,x)) + P_M\lambda(V(t,x)) \tag{6.7}$$

sont satisfaites. On peut choisir $\Gamma(\cdot)$ de classe $\mathcal{K}_\infty$ et $\lambda(\cdot)$, zéro en zéro, de classe C^2, avec une dérivé première positive, telle que, pour tout $v \geq 0$,

$$\Gamma(v) \ \geq \ 2P_M\lambda(v) \tag{6.8}$$

ce qui, combiné avec (6.7), donne

$$\frac{1}{2}\Gamma(V(t,x)) \ \leq \ U(t,x) \ \leq \ \frac{3}{2}\Gamma(V(t,x)) \ . \tag{6.9}$$

D'après l'hypothèse A1, la fonction $V(t,x)$ est une fonction de Lyapunov. On peut déduire facilement de (6.9) que $U(t,x)$ est elle aussi une fonction de Lyapunov stricte pour (6.2) si sa dérivée le long des trajectoires de ce système est inférieure à une fonction définie négative indépendante du temps.

2. Dérivée de $U(t,x)$ le long des trajectoires de (6.2).

Le dérivée de $U(t,x)$ le long des trajectoires de (6.2) satisfait

$$\dot{U}(t,x) \quad = \quad \left[\Gamma'(V(t,x)) + P(t)\lambda'(V(t,x))\right]\dot{V}(t,x) + \left[-\int_t^{t+T} p(s)ds + Tp(t)\right]\lambda(V(t,x)) \ . \tag{6.10}$$

En choisissant $\Gamma(\cdot)$ et $\lambda(\cdot)$ satisfaisant (6.8) et telles que, pour tout $v \geq 0$,

$$\frac{1}{2}\Gamma'(v) \ \geq \ P_M\lambda'(v) \ ,$$

nous obtenons

$$\dot{U}(t,x) \quad \leq \quad -\tfrac{1}{2}\Gamma'(V(t,x))p(t)W(x) + \left[-\int_0^{T} p(s)ds + Tp(t)\right]\lambda(V(t,x)) \ . \tag{6.11}$$

Grâce aux inégalités (6.4) de l'hypothèse A1, [MP1, Lemma B2] et la technique de construction utilisée pour démontrer [M2, Theorem 3.1], on peut déterminer deux fonctions $\Gamma(\cdot)$ et $\lambda(\cdot)$ telles que, pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{2}\Gamma'(V(t,x))W(x) \ \geq \ T\lambda(V(t,x)) \ . \tag{6.12}$$

Quand cette inégalité est satisfaite, alors

$$\dot{U}(t,x) \quad \leq \quad -\left(\int_0^T p(s)ds\right)\lambda(V(t,x)) \ . \tag{6.13}$$

Nous déduisons de l'hypothèse A2, de la croissance de λ et de (6.4) que

$$\dot{U}(t,x) \quad \leq \quad -\left(\int_0^T p(s)ds\right)\lambda(\alpha_1(|x|)) < 0 \ , \ \forall x \neq 0 \ . \tag{6.14}$$

6.1.2 Cas général

Nous remplaçons les hypothèses A1 et A2 par deux hypothèses moins restrictives.

Hypothèse B1. Une fonction de Lyapunov $V(t,x)$, périodique en temps de période T, une fonction positive ou nulle $\mathcal{W}(q(t),x)$ où $q(t)$ est périodique et de période T, telles que

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x)f(t,x) \ \leq \ -\mathcal{W}(q(t),x) \tag{6.15}$$

et deux fonctions $\alpha_i(\cdot)$, $i = 1$ à 2, de classe $\mathcal{K}_\infty$ telles que

$$\alpha_1(|x|) \ \leq \ V(t,x) \ \leq \ \alpha_2(|x|) \tag{6.16}$$

sont connues.

Hypothèse B2. Deux réels $\tau_1 \in [0,T[$ et $\tau_2 \in]\tau_1,T]$ ainsi qu'une fonction définie positive $W(x)$ tels que, pour tout $t \in [\tau_1,\tau_2]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W}(q(t),x) \geq W(x)$ sont connus.

Théorème 34 *Si le système (6.2) satisfait les hypothèses B1 et B2, des expressions explicites de fonctions de Lyapunov strictes pour le système (6.2) peuvent être déterminées.*

Ce théorème peut être prouvé en combinant le théorème 33 et le lemme suivant, dont la démonstration est triviale :

Lemme 35 *Soit $q(t)$ une fonction périodique de période T. Soit $\mathcal{W}(q(t),x)$ une fonction positive telle qu'il existe $\tau_1 \in [0,T[, \tau_2 \in]\tau_1,T]$ tels que, pour tout $t \in [\tau_1,\tau_2]$, $\mathcal{W}(q(t),x) \geq W(x)$, où $W(x)$ est une fonction définie positive. Alors*

$$\mathcal{W}(q(t),x) \ \geq \ p(t)W(x) \tag{6.17}$$

où $p(t)$ est une fonction périodique de période T telle que $\int_0^T p(s)ds > 0$ et $p(t) \ = \ 0$ quand $t \notin [\tau_1,\tau_2]$ et $p(t) \in]0,1]$ quand $t \in [\tau_1,\tau_2]$.

6.2 *Backstepping* et commande bornée

Dans cette section, nous allons utiliser la construction de fonction de Lyapunov présentée à la section 6.1 pour résoudre le problème de construire des lois de commande bornées globalement uniformément asymptotiquement stabilisantes ainsi que des fonctions de Lyapunov strictes associées à ces lois de commande au moyen d'une approche de type *backstepping* pour des systèmes non autonomes de la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(t,x) + g(t,x)z \ , \\ \dot{z} & = & p(t)(u + b(t,x,z)) \ , \end{array} \right. \tag{6.18}$$

où $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $z \in \mathbb{R}$, où $u \in \mathbb{R}$ est l'entrée, où $p(t)$ est une fonction bornée et $f(t,x)$ et $b(t,x,z)$ satisfont $f(t,0) = 0$, $b(t,0,0) = 0$ pour tout t.

L'approche que nous proposons repose également sur le résultat présenté dans [MI] qui permet d'obtenir, pour des systèmes autonomes, des expressions explicites de lois de commande bornées globalement asymptotiquement stabilisantes.

Au moyen des systèmes en forme chainée, nous montrerons à la section 6.2.3 comment des problèmes non linéaires peuvent conduire à l'étude de systèmes (6.18). En appliquant notre résultat principal de façon récursive, nous construirons des lois de commande globalement uniformément asymptotiquement stabilisantes et des fonctions de Lyapunov strictes associées pour une chaîne d'intégrateur à coefficients variant dans le temps ce qui impliquera que le même résultat pourra être obtenu pour des systèmes en forme chaînée.

Rappelons que d'un point de vue applicatif, l'intérêt de construire des commandes bornées est manifeste : les actionneurs sont saturés ou des contraintes sur les actionneurs sont généralement présentes. Durant très longtemps, la communauté scientifique pensait que la technique d'ajout d'intégrateur ne pouvait être employée pour obtenir des commandes bornées. Mais il s'avère qu'en fait cette technique peut être adaptée au problème de la construction de lois de commande bornées. Dans trois travaux récents [T7], [FP2], [MI], il est montré que pour des systèmes non autonomes (une chaîne d'intégrateurs de dimension n par exemple), des lois de commande bornées peuvent être construites en appliquant des versions nouvelles de cette technique. L'approche de [T7], [FP2] utilise de façon centrale les lois de commande saturées proposées par [T1], [T3] et l'approche de [MI] utilise principalement la construction d'une famille particulière de fonctions de Lyapunov. Quoiqu'il en soit, pour des familles de systèmes non autonomes, aucune méthode de type *backstepping* produisant des commandes bornées a été mise au point et les résultats de [T7], [FP2] et [MI] ne peuvent être étendues de façon directe au problème que nous considérons.

Notation.

Par S, nous notons l'ensemble des fonctions $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que (a) $\sigma(s)$ est une fonction bornée, (b) $s\sigma(s)$ est définie positive, (c) $s\sigma(s) \leq s^2$, (d) $\sigma'(s)$ est positive, bornée et $\sigma'(0) = 1$.

6.2.1 Résultat technique

Dans cette section, nous présentons un résultat technique qui est une conséquence directe du théorème 33. Ce résultat technique sera utilisé par la suite pour obtenir le résultat annoncé.

Nous construisons une fonction de Lyapunov stricte pour le système de dimension un suivant

$$\dot{\xi} = -q(t)\sigma(\xi) \tag{6.19}$$

où $q(t)$ est positive et telle que

$$0 \leq q(t) \leq \delta_1 \ , \ \forall t \ , \tag{6.20}$$

$$\int_t^{t+T} q(s)ds \geq \delta_2 > 0 \ , \ \forall t \ , \tag{6.21}$$

où δ_1, δ_2 et T sont des réels positifs et où $\sigma(\cdot)$ appartient à l'ensemble S.

Nous adaptons le résultat du théorème 33 au cas où $q(t)$ n'est pas nécessairement périodique mais satisfait la condition d'excitation persistante (6.21).

Observons tout d'abord que la propriété $0 \leq s\sigma(s) \leq s^2$ implique que la fonction $\frac{|\sigma(s)|}{|s|}$ est bornée. De plus $\sigma'(\cdot)$ est bornée et (6.20) est satisfaite. Il s'en suit que

$$M := \sup_{t\in\mathbb{R}} \left[T + \left| \int_t^{t+T} (s-t-T)q(s)ds \right| \sup_{s\in\mathbb{R}, s\neq 0} \left(\frac{|\sigma(s)| + |s\sigma'(s)|}{|s|} \right) \right] \tag{6.22}$$

est finie et positive. Nous pouvons maintenant établir le lemme suivant, qui est une variante du théorème 33.

Lemme 36 *La fonction*

$$\nu(t,\xi) := (M+1)\xi^2 + \left(\int_t^{t+T} (s-t-T)q(s)ds \right) \xi\sigma(\xi) \tag{6.23}$$

est une fonction de Lyapunov stricte pour le système (6.19) et vérifie

$$\xi^2 \leq \nu(t,\xi) \leq (2M+1)\xi^2 \ . \tag{6.24}$$

6.2.2 Résultat principal

Nous allons établir maintenant le résultat principal de cette partie. Considérons le système non linéaire temps variant (6.18) et introduisons les hypothèses suivantes.

Hypothèse A1. Les fonctions $p(t)$ et $\dot{p}(t)$ sont bornées par un nombre réel positif et deux nombres réels positifs T et γ connus tels que, pour tout t,

$$\int_t^{t+T} p(s)^2 ds \geq \gamma > 0 \ . \tag{6.25}$$

Hypothèse A2. Soit ε un nombre réel positif et n un entier positif. Une fonction de Lyapunov $V(t,x)$ telle que

$$\alpha_1(|x|) \leq V(t,x) \leq \alpha_2(|x|) \ , \ \left| \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) \right| \leq \alpha_3(|x|) \ , \tag{6.26}$$

où les fonctions $\alpha_i(\cdot)$ sont de classe $\mathcal{K}_\infty$, une fonction définie positive $W(x)$ et une loi de commande $z_s(t,x) := p(t)^{n+2}\mu_s(t,x)$, bornée en norme par ε telle que $\mu_s(t,0) = 0$ et

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x)[f(t,x) + g(t,x)z_s(t,x)] \leq -W(x) \tag{6.27}$$

sont connues. De plus, les fonctions

$$|\mu_s(t,x)| \ , \ \left| \frac{\partial \mu_s}{\partial t}(t,x) \right| \ , \ \left| \frac{\partial \mu_s}{\partial x}(t,x)f(t,x) \right| \ , \ \left| \frac{\partial \mu_s}{\partial x}(t,x)g(t,x) \right| \ , \ |b(t,x,z)| \ , \tag{6.28}$$

sont bornées.

Hypothèse A3. Une fonction à valeur réelle $\zeta(\cdot)$ telle que $\zeta(s) > 0$ pour tout $s \neq 0$ et $\int_0^r \zeta(s)ds$ est de classe $\mathcal{K}_\infty$, une fonction $\alpha_4(\cdot)$ de classe $\mathcal{K}_\infty$ et une fonction positive $\beta(\cdot)$ telles que les inégalités

$$\zeta(V(t,x)) \left| \frac{\partial V}{\partial x}(t,x)g(t,x) \right|^2 \leq \frac{1}{2}W(x) \ , \tag{6.29}$$

$$|f(t,x)| \leq \alpha_4(|x|) \ , \ |g(t,x)| \leq \beta(|x|) \tag{6.30}$$

sont satisfaites pour tout t, x sont connues.

Hypothèse A3'. La fonction $W(x)$ est telle que, pour tout nombre réel $c_1 > 0$,

$$W(x) \geq c_1|x|^2 \ , \ \forall x : |x| \leq 1 \ . \tag{6.31}$$

Théorème 37 *Supposons que le système (6.18) satisfait les hypothèses A1, A2 et A3. Alors le système (6.18) est globalement uniformément asymptotiquement stabilisable par une loi de commande bornée $u_s(t,x,z)$ telle que, pour tout t, $u_s(t,0,0) = 0$. Pour le système en boucle fermée correspondant, une fonction de Lyapunov stricte peut être construite. Cette fonction de Lyapunov appartient à la famille des fonctions de la forme*

$$U(t,x,z) = l(V(t,x)) + k(\nu(t,\Omega(z) - z_s(t,x))) \tag{6.32}$$

avec

$$\nu(t,Z) = (M+1)Z^2 + \left(\int_t^{t+T} (s-t-T)p(s)^{2m} ds\right) Z\sigma(Z) \tag{6.33}$$

où m est un entier positif, $l(\cdot), k(\cdot)$ sont des fonctions de classe $\mathcal{K}_\infty$ et $\Omega(\cdot)$ est une fonction à valeur réelle, zéro en zéro, telle que $\Omega'(z) \geq 1$ pour tout z. Si de plus l'hypothèse A3' est satisfaite, le système (6.18) est globalement uniformément asymptotiquement et localement exponentiellement stabilisable par une loi de commande bornée $u_s(t,x,z)$ telle que, pour tout t, $u_s(t,0,0) = 0$ et une fonction de Lyapunov stricte pour le système en boucle fermée correspondant ayant une dérivée le long des trajectoires bornée sur un voisinage de l'origine par une forme quadratique en (x,z) définie négative peut être construite. Cette fonction de Lyapunov appartient à la famille des fonctions (6.32).

Discussion du théorème 37.

• Toutes les fonctions périodiques à valeur réelle de classe C^1, qui ne sont pas identiquement égales à zéro, satisfont l'hypothèse A1. Dans le cas particulier où, pour tout t, $p(t) > 0$ ou $p(t) < 0$, alors une preuve plus simple que celle que nous allons voir peut être réalisée en utilisant le changement de loi de commande $v = p(t)(u + b(t,x,z))$ et en combinant, par exemple, les résultats de [T8], [TK] et [T7]. Mais supposer que, pour tout t, $p(t) > 0$ ou $p(t) < 0$ est très restrictif. Dans le cas où $p(t)$ prend des valeurs positives et négatives, alors la construction de lois de commande globalement uniformément asymptotiquement stables ainsi que de fonctions de Lyapunov strictes associées à celles-ci pour un système du type (6.18) présente une bien plus grande difficulté. Même lorsque l'aspect borné des lois de commande, n'est pas spécifiquement désiré, aucune construction de ce type n'est connue.

• Imposer que les fonctions en (6.28) sont bornées ainsi que l'hypothèse A3 garantit que le phénomène d'explosion en temps fini ne se produit pas. Ces restrictions ne peuvent être supprimées sans être remplacées par d'autres hypothèses.

• L'hypothèse A3' garantit que la loi de commande $z_s(t,x)$ non seulement stabilise globalement uniformément asymptotiquement l'origine du sous-système de (6.18) mais aussi stabilise celui-ci localement exponentiellement.

• Dans la formule de lois de commande stabilisantes que nous allons construire (voir (6.38)), la fonction $V(t,x)$ n'est pas présente : par conséquent, la stratégie de construction de lois de commande que nous proposons peut être appliquée même si la fonction $V(t,x)$ n'est pas connue de façon exacte.

• Une question importante est celle de savoir si le théorème 37 peut être appliqué de façon récursive. D'une façon générale, il s'avère que les hypothèses ne seront pas vérifiées de façon répétée en raison de la présence du terme $b(t,x,z)$ dans l'expression de la loi de commande que nous allons construire (voir (6.38)) car celui-ci empêche $u_s(t,x,z)$ et ses dérivées le long des trajectoires de s'annuler quand $p(t)$ s'annule. Quoiqu'il en soit, dans des cas particuliers, le théorème 37 peut être appliqué de façon récursive. De manière simplifiée, on peut dire qu'il peut l'être pour les systèmes de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(t,x,z_1) \ , \\ \dot{z}_1 & = & p_1(t)z_2 + b_1(t,x,z) \ , \\ & \vdots & \\ \dot{z}_n & = & p_n(t)u + b_n(t,x,z) \ , \end{array}\right. \tag{6.34}$$

où les fonctions $b_i(t,x,z)$ sont nulles ou quand elles sont suffisamment "petites" : en effet, puisque pour un système (6.34) sans les fonctions $b_i(t,x,z)$ on peut construire une loi de commande globalement asymptotiquement stabilisante ainsi qu'une fonction de Lyapunov stricte associée au système en boucle fermé correspondant, on peut utiliser ces outils pour déterminer la petitesse que doivent avoir les fonctions $b_i(t,x,z)$

pour que leur présence ne change pas les propriétés de stabilité asymptotique des systèmes stabilisés par les lois de commande construites en leur absence. Il est évident que le choix de loi de commande effectué à chaque étape joue un rôle important. En particulier, à chaque étape, la loi de commande doit anticiper les fonctions $p_i(t)$ qui suivent : on comprend grâce au mécanisme de construction de lois de commande utilisé pour prouver le théorème 37 qu'une stratégie possible de construction pour le système (6.34) consiste à construire de façon récursive des lois de commande, que, par commodité, nous notons $z_{i,f}(t, x, z_1, \ldots, z_{i-1})$ pour $i = 2$ à $n+1$, telles que $z_{i,f}(t, x, z_1, \ldots, z_{i-1}) = p_i(t)^2 \ldots p_n(t)^{n-i+2}\psi_i(t, x, z_1, \ldots, z_{i-1})$ où les fonctions $\psi_i(t, x, z_1, \ldots, z_{i-1})$ sont suffisamment régulières. Nous ne présenterons pas une étude complète et rigoureuse de ce problème : elle nécessiterait des pages de calculs simples mais longs qui peuvent être déduits des idées de la démonstration du théorème 37. Nous nous limiterons à illustrer la possibilité d'appliquer la technique de manière récursive en résolvant dans la section 6.2.3 le problème de la stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs de dimension trois avec des coefficients variant dans le temps.

Preuve.
Première étape : nouvelle variable.

Nous introduisons la variable

$$Z := \Omega(z) - z_s(t, x) \tag{6.35}$$

où $\Omega(\cdot)$ est une fonction présente dans (6.32). En plus des propriétés $\Omega(0) = 0$ et $\Omega'(z) \geq 1$ pour tout z, nous supposons que : (a) $\Omega'(z) = 1$ quand $|z| \leq 2\varepsilon$, (b) $\Omega'(z) \geq |z|$ quand $|z| \geq 2\varepsilon + 1$. La dérivée de Z satisfait

$$\begin{array}{rcl} \dot{Z} & = & \Omega'(z)p(t)(u + b(t, x, z)) - \frac{\partial z_s}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial z_s}{\partial x}(t, x)[f(t, x) + g(t, x)z] \\ & = & \Omega'(z)p(t)(u + b(t, x, z)) + p(t)\lambda(t, x, z) \end{array} \tag{6.36}$$

avec

$$\lambda(t, x, z) \quad = \quad -(n + 2)\dot{p}(t)p(t)^n\mu_s(t, x) - p(t)^{n+1}\frac{\partial \mu_s}{\partial t}(t, x) - p(t)^{n+1}\frac{\partial \mu_s}{\partial x}(t, x)[f(t, x) + g(t, x)z] \ . \tag{6.37}$$

Nous choisissons pour u

$$u = u_s(t, x, z) := -b(t, x, z) - \frac{p(t)^{2m-1}\sigma(Z) + \lambda(t, x, z)}{\Omega'(z)} \tag{6.38}$$

où m est un entier a positif et où $\sigma(\cdot)$ est une fonction appartenant à l'ensemble S définie dans le préliminaire. Un tel choix de loi de commande donne

$$\dot{Z} = -p(t)^{2m}\sigma(Z) \ . \tag{6.39}$$

On peut vérifier facilement que l'hypothèse A1 et les propriétés de $\sigma(\cdot)$ impliquent que ce système est globalement uniformément asymptotiquement et localement exponentiellement stable. Notre objectif est maintenant de construire une fonction de Lyapunov stricte pour le système (6.18) en boucle fermée avec (6.38) en exploitant les propriétés de stabilité de (6.39).
Deuxième étape : fonction de Lyapunov strict pour le système (6.39).

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz (voir (3.1)), on peut facilement vérifier que l'hypothèse A1 implique que pour tout entier positif m, on peut trouver un réel positif γ_m tel que, pour tout t,

$$\int_t^{t+T} p(s)^{2m} ds \geq \gamma_m > 0 \ . \tag{6.40}$$

De plus, $p(t)$ est borné en norme. Il s'en suit que le lemme 36 s'applique au système (6.39) : la fonction définie en (6.33) où

$$M = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left[T + \left| \int_t^{t+T} (s - t - T)p(s)^{2m} ds \right| \sup_{s\in\mathbb{R}, s\neq 0} \left(\frac{|\sigma(s)| + |s\sigma'(s)|}{|s|} \right) \right] \tag{6.41}$$

est une fonction de Lyapunov stricte pour le système (6.39) : sa dérivée le long des trajectoires de (6.39) satisfait

$$\dot{\nu}(t,Z) \leq -\left(\int_t^{t+T} p(s)^{2m} ds\right) Z\sigma(Z) \leq -\gamma_m Z\sigma(Z) < 0 \ , \ \forall Z \neq 0 \ . \tag{6.42}$$

Troisième étape : fonction de Lyapunov stricte pour le système (6.18).

Cette étape consiste à déterminer une fonction k de classe $\mathcal{K}_\infty$ et suffisement grande et une fonction l de classe $\mathcal{K}_\infty$ suffisement petite de telle sorte que la fonction de Lyapunov de la famille (6.32) correspondante soit une fonction de Lyapunov stricte pour le système (6.18) en boucle fermée avec (6.38). Cette détermination des fonctions k et l ont des liens avec les constructions présentées dans [ST] et [MP1].

Quatrième étape : aspect borné de la loi de commande (6.38). Nous ne donnons pas la démonstration de cette étape simple.

Cinquième étape : le cas particulier où l'hypothèse A3' est satisfaite. Nous ne donnons pas la démonstration de cette étape simple.

6.2.3 Illustration : chaîne d'intégrateur dépendante du temps

Les systèmes en forme chainée avec deux entrées (voir par exemple [S1]) sont donnés par les équation suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{z}_n &=& z_{n-1}v_1 \ , \\ &\vdots& \\ \dot{z}_3 &=& z_2 v_1 \ , \\ \dot{z}_2 &=& v_2 \ , \\ \dot{z}_1 &=& v_1 \ . \end{array}\right. \tag{6.43}$$

L'importance de cette famille de systèmes est bien connue : divers systèmes non-holonomes peuvent être transformés en des systèmes en forme chainée. De nombreux travaux (voir par exemple [JN2], [JN1], [L3]) consacrés à ces systèmes portent sur la stabilisation de l'origine ou d'une trajectoire.

Le théorème 37 peut être illustré, par exemple, l'utilisant pour résoudre un problème de suivi de trajectoire pour un système de la forme (6.43) au moyen d'une loi de commande bornée. En effet, supposons que nous souhaitions suivre une trajectoire bornée satisfaisant

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{z}_{n,r}(t) &=& z_{n-1,r}(t)v_{1,r}(t) \ , \\ &\vdots& \\ \dot{z}_{3,r}(t) &=& z_{2,r}(t)v_{1,r}(t) \ , \\ \dot{z}_{2,r}(t) &=& v_{2,r}(t) \ , \\ \dot{z}_{1,r}(t) &=& v_{1,r}(t) \ . \end{array}\right. \tag{6.44}$$

Alors, en effectuant le changement de loi de commande $v_1 = v_{1,r}(t) + u_1, v_2 = v_{2,r}(t) + u_2$, et en remplaçant pour simplifier $v_{1,r}(t)$ par $p(t)$, on obtient l'équation d'erreur

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{z}_{n,e} &=& p(t)z_{n-1,e} + z_{n-1}u_1 \ , \\ &\vdots& \\ \dot{z}_{3,e} &=& p(t)z_{2,e} + z_2 u_1 \ , \\ \dot{z}_{2,e} &=& u_2 \ , \\ \dot{z}_{1,e} &=& u_1 \ , \end{array}\right. \tag{6.45}$$

où $z_{i,e} = (z_i - z_{i,r}(t))$ pour tout $i = 1$ à n. Au moyen du théorème 37, on peut construire pour le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{z}_{n,e} &=& p(t)z_{n-1,e} \ , \\ &\vdots& \\ \dot{z}_{3,e} &=& p(t)z_{2,e} \ , \\ \dot{z}_{2,e} &=& u_2 \ , \end{array}\right. \tag{6.46}$$

une loi de commande bornée $u_2(t, z_e)$ avec $z_e = (z_{2,e}, \ldots, z_{n,e})$, une fonction Lyapunov stricte $V_e(t, z_e)$ et une fonction $W_e(z_e)$ définie positive telles que la dérivée de $V_e(\cdot)$ le long des trajectoires de (6.46) en boucle fermée avec $u_2(t, z_e)$ satisfait

$$\dot{V}_e \leq -W_e(z_e) \ . \tag{6.47}$$

Alors la dérivée de la fonction

$$U_e(t, z_e, z_{1,e}) = V_e(t, z_e) + \frac{1}{2} z_{1,e}^2 \tag{6.48}$$

le long des trajectoires de (6.45) en boucle fermée avec $u_2(t, z_e)$ et la loi de commande bornée

$$u_1(t, z_{1,e}, z_e) = -\frac{\frac{\partial V_e}{\partial z_{n,e}}(t, z_e) z_{n-1} + \cdots + \frac{\partial V_e}{\partial z_{3,e}}(t, z_e) z_2 + z_{1,e}}{1 + \left(\frac{\partial V_e}{\partial z_{n,e}}(t, z_e) z_{n-1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial V_e}{\partial z_{3,e}}(t, z_e) z_2\right)^2 + z_{1,e}^2} \tag{6.49}$$

satisfait

$$\dot{U}_e \leq -W_e(z_e) - \frac{\left(\frac{\partial V_e}{\partial z_{n,e}}(t, z_e) z_{n-1} + \cdots + \frac{\partial V_e}{\partial z_{3,e}}(t, z_e) z_2 + z_{1,e}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial V_e}{\partial z_{n,e}}(t, z_e) z_{n-1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial V_e}{\partial z_{3,e}}(t, z_e) z_2\right)^2 + z_{1,e}^2} \ . \tag{6.50}$$

On peut vérifier facilement que cela implique que $U_e(\cdot)$ est une fonction de Lyapunov stricte pour le système (6.45) en boucle fermée avec les lois de commande $u_1(t, z_{1,e}, z_e)$, $u_2(t, z_e)$.

En conséquence, nous avons montré que le problème de déterminer des lois de commande bornées globalement uniformément asymptotiquement stabilisantes et des fonctions de Lyapunov strictes pour les équations d'erreur venant du problème de suivi de trajectoire pour un système en forme chainée peut être résolu au moyen d'une approche reposant sur le théorème 37.

Troisième partie

Applications

Chapitre 7

Système pendule-chariot

Ce chapitre est consacré à la stabilisation par retour dynamique de sortie du système mécanique appelé "pendule-chariot" (voir [24]). Ce système est l'un des dispositifs de laboratoire employés pour illustrer des techniques de stabilisation non linéaires les plus populaires. Le pendule-chariot est constitué d'un chariot qui se trouve sur une plate forme et sur lequel pivote librement un pendule. Aucune action directe de commande n'est effectuée sur celui-ci. Le chariot se déplace horizontalement suivant un axe perpendiculaire à l'axe de rotation du pendule. Il est actionné par une force qui agit suivant la même direction. L'objectif de commande est la stabilisation du pendule en position verticale supérieure, qui est une position instable, et cela en déplaçant le chariot et en le stabilisant en une position donnée. Puisque l'accélération angulaire du pendule n'est pas directement commandée, le système pendule-chariot est un système sous actionné ; les techniques mises au point pour les systèmes mécaniques entièrement actionnés ne s'appliquent donc pas. Nous allons supposer que les variables de position sont les seules mesurées, hypothèse raisonnable d'un point de vue applicatif : il est connu que les variables de vitesse d'un système ou ne peuvent être mesurées ou ne peuvent l'être que très difficilement.

7.1 Retour de sortie

Le système pendule chariot, quand tous ses paramètres sont choisis (sans perte de généralité) égaux à 1, est décrit par les équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\xi} & = & s\ , \\ \dot{s} & = & \frac{\sin(\theta)\omega^2 - g\sin(\theta)\cos(\theta) + F}{1+\sin^2(\theta)}\ , \\ \dot{\theta} & = & \omega\ , \\ \dot{\omega} & = & \frac{2g\sin(\theta) - \omega^2\sin(\theta)\cos(\theta) - F\cos(\theta)}{1+\sin^2(\theta)}\ , \end{array}\right. \tag{7.1}$$

où ξ est la position du chariot, θ est la déviation angulaire par rapport à la position verticale du pendule qui pivote autour d'un point fixe du chariot et F est la force qui agit sur le chariot. La sortie que nous considérons est

$$y = (\xi, \theta)^\top\ . \tag{7.2}$$

Au moyen du théorème 12, on peut prouver le résultat suivant :

Théorème 38 *Le système (7.1) avec la sortie (7.2) est globalement asymptotiquement stabilisable par retour dynamique de sortie sur le domaine* $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}$.

7.1.1 Preuve du théorème 38

Partie I : changement de coordonnées et de loi de commande. L'idée du changement de coordonnées présenté ci-dessous fut introduite dans [TKJ] et dans [JK] pour traiter une famille de systèmes non linéaires qui

sont non linéaires par rapport aux variables non mesurées de l'état et peuvent être stabilisés globalement par loi de commande d'état.
Le changement de coordonnées

$$\Theta = \tan(\theta) \ , \ \Omega \ = \ \omega\sqrt{\frac{1+2\Theta^2}{1+\Theta^2}} \tag{7.3}$$

transforme D en $\mathbb{R}^4$ et le système (7.1) en

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\xi} & = & s \ , \\ \dot{s} & = & \frac{\Theta(1+\Theta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+2\Theta^2)^2}\Omega^2 - \frac{g\Theta}{1+2\Theta^2} + \frac{1+\Theta^2}{1+2\Theta^2}F \ , \\ \dot{\Theta} & = & \frac{(1+\Theta^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+2\Theta^2}}\Omega \ , \\ \dot{\Omega} & = & \frac{2g\Theta}{\sqrt{1+2\Theta^2}} - \frac{F}{\sqrt{1+2\Theta^2}} \ . \end{array}\right. \tag{7.4}$$

Partie II : stabilisation dynamique par retour de sortie du sous système en (Θ, Ω).

Nous considérons l'extension dynamique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\Theta}_h & = & \frac{(1+\Theta^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+2\Theta^2}}[\Omega_h + (\Theta-\Theta_h)] \ , \\ \dot{\Omega}_h & = & \frac{(1+\Theta^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+2\Theta^2}}(\Theta-\Theta_h) + \frac{2g\Theta}{\sqrt{1+2\Theta^2}} - \frac{F}{\sqrt{1+2\Theta^2}} \ . \end{array}\right. \tag{7.5}$$

Grâce aux variables $(\Theta_e, \Omega_e) = (\Theta - \Theta_h, \Omega - \Omega_h)$, et en introduisant la notation simplificatrice

$$T(r) = \frac{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+2r^2}} \tag{7.6}$$

on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\Theta}_e & = & T(\Theta)[\Omega_e - \Theta_e] \ , \\ \dot{\Omega}_e & = & -T(\Theta)\Theta_e \ , \\ \dot{\Theta}_h & = & T(\Theta)[\Omega_h + \Theta_e] \ , \\ \dot{\Omega}_h & = & T(\Theta)\Theta_e + \frac{2g\Theta}{\sqrt{1+2\Theta^2}} - \frac{F}{\sqrt{1+2\Theta^2}} \ . \end{array}\right. \tag{7.7}$$

Le système est globalement exponentiellement stabilisé par la loi de commande

$$F \ = \ 2g\Theta + \left(1+\Theta^2\right)^{\frac{3}{2}}(\Theta_h + \Omega_h) - \sqrt{1+2\Theta^2}F_a \tag{7.8}$$

quand $F_a = 0$.

Partie III : stabilisation dynamique par retour de sortie du système entier.

Le changement de loi de commande (7.8) donne le système *feedforward*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\xi} & = & s \ , \\ \dot{s} & = & \frac{\Theta(1+\Theta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\Theta^2)^2}\Omega^2 + g\Theta + \frac{\left(1+\Theta^2\right)^{\frac{5}{2}}(\Theta_h+\Omega_h)}{1+2\Theta^2} - \frac{1+\Theta^2}{\sqrt{1+2\Theta^2}}F_a \ , \\ \dot{\Theta}_e & = & T(\Theta)[\Omega_e - \Theta_e] \ , \\ \dot{\Omega}_e & = & -T(\Theta)\Theta_e \ , \\ \dot{\Theta}_h & = & T(\Theta)[\Omega_h + \Theta_e] \ , \\ \dot{\Omega}_h & = & T(\Theta)[-\Theta_h - \Omega_h + \Theta_e] + F_a \ . \end{array}\right. \tag{7.9}$$

Nous démontrons à la section 7.2 le résultat suivant :

Résultat 39 *Le théorème 12 s'applique au système (7.9) avec* $x = (\xi, s)^\top, z = (\Theta_e, \Omega_e, \Theta_h, \Omega_h)^\top, y = \xi$.

Partie IV : étape finale de la construction de loi de commande. Puisque le théorème 12 s'applique au système (7.9), nous savons que l'expression explicite d'un retour dynamique de sortie peut être déterminée. Ci dessous, nous montrons comment construire des lois de commande.

Première étape. L'observateur que nous introduisons est le suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\hat{\xi}} & = & \hat{s} + \xi - \hat{\xi} \ , \\ \dot{\hat{s}} & = & \frac{\hat{\Theta}(1+\hat{\Theta}^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\hat{\Theta}^2)^2}\hat{\Omega}^2 + g\hat{\Theta} + \frac{\left(1+\hat{\Theta}^2\right)^{\frac{5}{2}}(\hat{\Theta}_h+\hat{\Omega}_h)}{1+2\hat{\Theta}^2} - \frac{1+\hat{\Theta}^2}{\sqrt{1+2\hat{\Theta}^2}}F_a + \xi - \hat{\xi} \ , \\ \dot{\hat{\Theta}}_e & = & T(\hat{\Theta})[\hat{\Omega}_e - \hat{\Theta}_e] \ , \\ \dot{\hat{\Omega}}_e & = & -T(\hat{\Theta})\hat{\Theta}_e \ , \\ \dot{\hat{\Theta}}_h & = & T(\hat{\Theta})[\hat{\Omega}_h + \hat{\Theta}_e] \ , \\ \dot{\hat{\Omega}}_h & = & T(\hat{\Theta})[-\hat{\Theta}_h - \hat{\Omega}_h + \hat{\Theta}_e] + F_a \ . \end{array}\right. \tag{7.10}$$

Deuxième étape. Avec, $\tilde{\xi} = \xi - \hat{\xi}, \tilde{s} = s - \hat{s}, \tilde{\Theta}_e = \Theta_e - \hat{\Theta}_e, \tilde{\Omega}_e = \Omega_e - \hat{\Omega}_e, \tilde{\Theta}_h = \Theta_h - \hat{\Theta}_h, \tilde{\Omega}_h = \Omega_h - \hat{\Omega}_h$, nous obtenons l'équation d'erreur :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{\xi}} & = & \tilde{s} - \tilde{\xi} \ , \\ \dot{\tilde{s}} & = & -\tilde{\xi} + \frac{\Theta(1+\Theta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+2\Theta^2)^2}\Omega^2 - \frac{\hat{\Theta}(1+\hat{\Theta}^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+2\hat{\Theta}^2)^2}\hat{\Omega}^2 + g(\Theta - \hat{\Theta}) \\ & & + \frac{\left(1+\Theta^2\right)^{\frac{5}{2}}(\Theta_h+\Omega_h)}{1+2\Theta^2} - \frac{\left(1+\hat{\Theta}^2\right)^{\frac{5}{2}}(\hat{\Theta}_h+\hat{\Omega}_h)}{1+2\hat{\Theta}^2} + \left(\frac{1+\hat{\Theta}^2}{\sqrt{1+2\hat{\Theta}^2}} - \frac{1+\Theta^2}{\sqrt{1+2\Theta^2}}\right)F_a \ , \\ \dot{\tilde{\Theta}}_e & = & T(\Theta)[\Omega_e - \Theta_e] - T(\hat{\Theta})[\hat{\Omega}_e - \hat{\Theta}_e] \ , \\ \dot{\tilde{\Omega}}_e & = & -T(\hat{\Theta})\hat{\Theta}_e + T(\Theta)\Theta_e \ , \\ \dot{\tilde{\Theta}}_h & = & T(\Theta)[\Omega_h + \Theta_e] - T(\hat{\Theta})[\hat{\Omega}_h + \hat{\Theta}_e] \ , \\ \dot{\tilde{\Omega}}_h & = & T(\Theta)[-\Theta_h - \Omega_h + \Theta_e] + T(\Theta)[\hat{\Theta}_h + \hat{\Omega}_h - \hat{\Theta}_e] \ . \end{array}\right. \tag{7.11}$$

Troisième étape. Analyse de stabilité. Considérons les formes quadratiques définies positives

$$Q_1(a,b) = a^2 + b^2 - ab \ , \ Q_2(a,b) = a^2 + b^2 + ab \ . \tag{7.12}$$

Alors

$$\dot{Q}_1 \ = \ -T(\Theta)Q_1(\Theta_e, \Omega_e) \ , \tag{7.13}$$

$$\dot{Q}_2 \ = \ T(\Theta)[-Q_2(\Theta_h, \Omega_h) + 3(\Theta_h + \Omega_h)\Theta_e] + (2\Omega_h + \Theta_h)F_a \ , \tag{7.14}$$

$$\dot{Q}_1 \ = \ -T(\hat{\Theta})Q_1(\hat{\Theta}_e, \hat{\Omega}_e) \ , \tag{7.15}$$

$$\dot{Q}_2 \ = \ T(\hat{\Theta})[-Q_2(\hat{\Theta}_h, \hat{\Omega}_h) + 3(\hat{\Theta}_h + \hat{\Omega}_h)\hat{\Theta}_e] + (2\hat{\Omega}_h + \hat{\Theta}_h)F_a \ . \tag{7.16}$$

Soit F_a une fonction bornée en norme par une constante $\mu > 0$. On peut déduire des égalités (7.13), (7.14), (7.15), (7.16) que $\Theta_e, \Omega_e, \Theta_h, \Omega_h, \hat{\Theta}_e, \hat{\Omega}_e, \hat{\Theta}_h, \hat{\Omega}_h$ sont bornées. Il s'en suit que $\Theta_e, \Omega_e, \hat{\Theta}_e, \hat{\Omega}_e$ convergent vers zéro et que les solutions du système sont définies pour tout $t \geq 0$. De plus,

$$\dot{Q}_2 \ \leq \ T(\Theta)[-\frac{1}{2}Q_2(\Theta_h, \Omega_h) + 8\mu^2 + 3(\Theta_h + \Omega_h)\Theta_e] \ . \tag{7.17}$$

Puisque Θ_e converge vers zéro, nous déduisons qu'il existe T_1 tel que, pour tout $t \geq T_1$, $Q_2(\Theta_h, \Omega_h) \leq 17\mu^2$. Il s'en suit que pour tout $t \geq T_1$, $|\Theta_h| \leq \sqrt{34}\mu, |\Omega_h| \leq \sqrt{34}\mu$. En suivant pas à pas le même raisonnement, on peut prouver qu'il existe $T_2 \geq T_1$ tel que, pour tout $t \geq T_2$, $|\hat{\Theta}_h| \leq \sqrt{34}\mu, |\hat{\Omega}_h| \leq \sqrt{34}\mu$. Puisque $\Theta_e, \Omega_e, \hat{\Theta}_e, \hat{\Omega}_e$ convergent vers zéro, il existe $T_3 \geq T_2$ tel que, pour tout $t \geq T_3$,

$$\begin{array}{c} |\Theta_h| \leq \sqrt{34}\mu \ , |\Omega_h| \leq \sqrt{34}\mu \ , |\hat{\Theta}_h| \leq \sqrt{34}\mu \ , |\hat{\Omega}_h| \leq \sqrt{34}\mu \ , \\ |\Theta_e| \leq \sqrt{34}\mu \ , |\Omega_e| \leq \sqrt{34}\mu \ , |\hat{\Theta}_e| \leq \sqrt{34}\mu \ , |\hat{\Omega}_e| \leq \sqrt{34}\mu \ . \end{array} \tag{7.18}$$

D'un autre côté,

$$|T'(r)| \leq 2\ ,\ \forall r \in [-1,1]\ . \tag{7.19}$$

Il s'en suit que, lorsque $|\Theta_e| \leq \frac{1}{2}$, $|\hat{\Theta}_e| \leq \frac{1}{2}$, $|\Theta_h| \leq \frac{1}{2}$ et $|\hat{\Theta}_h| \leq \frac{1}{2}$,

$$\left|T(\Theta) - T(\hat{\Theta})\right| \leq 2|\Theta^2 - \hat{\Theta}^2|\ . \tag{7.20}$$

Nous déduisons que si l'on choisi μ plus petit que $\frac{1}{2\sqrt{34}}$, alors pour tout $t \geq T_3$, l'inégalité (7.20) est satisfaite. Au moyen de cette inégalité, on peut prouver que

$$\begin{array}{rcl} \dot{Q}_2 & \leq & -T(\Theta)Q_2(\tilde{\Theta}_h,\tilde{\Omega}_h) + 4352\mu^2 Q_2(\tilde{\Theta}_h,\tilde{\Omega}_h) \\ & & +\left(1088\mu^2+4\right)\left(|\tilde{\Theta}_h| + |\tilde{\Omega}_h|\right)\left(|\hat{\Theta}_e| + |\tilde{\Theta}_e|\right) \end{array} \tag{7.21}$$

est satisfaite. En choisissant $\mu \in \left(0, \frac{1}{64}\right]$, on obtient

$$\dot{Q}_2 \quad \leq \quad -\tfrac{1}{10}T(\Theta)Q_2(\tilde{\Theta}_h,\tilde{\Omega}_h) + 5\left(|\tilde{\Theta}_h| + |\tilde{\Omega}_h|\right)\left(|\hat{\Theta}_e| + |\tilde{\Theta}_e|\right)\ . \tag{7.22}$$

Puisque Θ_e et $\hat{\Theta}_e$ convergent vers zéro, il s'en suit que $\tilde{\Theta}_h$ et $\tilde{\Omega}_h$ convergent vers zéro.
Dernière étape. On peut vérifier aisément que cette propriété implique que toutes les variables de l'équation d'erreur convergent exponentiellement vers zéro. En utilisant la technique du *forwarding* (voir [MP1, Section B]), on peut construire une loi de commande $F_a(\hat{\xi},\hat{s},\hat{\Theta}_e,\hat{\Omega}_e,\hat{\Theta}_h,\hat{\Omega}_h)$ telle que toutes les solutions de (7.10) en boucle fermée avec cette loi de commande convergent vers zéro quand $\xi - \hat{\xi}$ converge exponentiellement vers zéro (voir Section 7.2). ∎

7.2 Preuve du résultat 39

Vérifions que les hypothèses du théorème 12 sont satisfaites par le système (7.9).
Hypothèse A1. La dérivée de la forme quadratique définie positive

$$\mathcal{Q}(\Theta_e,\Omega_e,\Theta_h,\Omega_h) \;=\; 400\Theta_e^2 + 400\Omega_e^2 - 400\Theta_e\Omega_e + \Theta_h^2 + \Omega_h^2 + \Theta_h\Omega_h \tag{7.23}$$

le long des trajectoires du système (7.9) satisfait :

$$\dot{\mathcal{Q}} \quad \leq \quad -\tfrac{(1+\Theta^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{1+2\Theta^2}}\mathcal{Q}(\Theta_e,\Omega_e,\Theta_h,\Omega_h) + 9F_a^2 \leq -\tfrac{1}{2}\mathcal{Q}(\Theta_e,\Omega_e,\Theta_h,\Omega_h) + 9F_a^2\ . \tag{7.24}$$

Il s'en suit que l'hypothèse A1 est satisfaite.
Hypothèse A2. D'après la construction de fonction de Lyapunov pour les systèmes *feedforward* proposée dans [MP1, Section C], nous savons que pour tout $\mu > 0$, on peut déterminer deux fonctions $K_1(\cdot)$, $K_2(\cdot)$ de classe $\mathcal{K}_\infty$, de classe C^1, avec des dérivées premières positives et croissantes ainsi qu'une loi de commande $F_a(\Theta_e,\Omega_e,\Theta_h,\Omega_h,s,x)$, bornée en norme par μ, telles que la dérivée de la fonction définie positive et radialement non bornée

$$U(\Theta_e,\Omega_e,\Theta_h,\Omega_h,s,x) \;=\; K_2\left(K_1\left(\mathcal{Q}(\Theta_e,\Omega_e,\Theta_h,\Omega_h)\right) + \sqrt{1+S^2} - 1\right) + \sqrt{1+X^2} - 1 \tag{7.25}$$

avec

$$S \;=\; s + g\Theta_h + (1+g)\Omega_h\ ,\ X \;=\; x + \alpha_1 S + \alpha_2\Theta_h + \alpha_3\Omega_h \tag{7.26}$$

où chaque α_i est un nombre réel, le long des solutions du système (7.9) est définie négative. Il s'en suit que la dérivée de la fonction

$$U_*(\Theta_e,\Omega_e,\Theta_h,\Omega_h,s,x) \;=\; k_*(U(\Theta_e,\Omega_e,\Theta_h,\Omega_h,s,x)) \tag{7.27}$$

où $k^*(\cdot)$ est une fonction de classe $\mathcal{K}_\infty$ et de classe C^1 est définie négative et U_* est définie positive et radialement non bornée.

De plus, en choisissant

$$k_*(u) \;=\; \frac{1}{C}\left[\sqrt{K_1^{-1}(K_2^{-1}(u))+1}-1\right] \tag{7.28}$$

où C est un nombre réel positif suffisamment grand, on peut prouver que

$$\left|\frac{\partial U_*}{\partial \Theta_e}\right| \;\leq\; 1\;,\;\left|\frac{\partial U_*}{\partial \Omega_e}\right| \;\leq\; 1\;,\;\left|\frac{\partial U_*}{\partial \Omega_h}\right| \;\leq\; 1\;,\;\left|\frac{\partial U_*}{\partial x}\right| \;\leq\; 1\;,\;\left|\frac{\partial U_*}{\partial s}\right| \;\leq\; 1\;. \tag{7.29}$$

Ces inégalités nous permettent de conclure grâce au résultat suivant

Résultat 40 *Considérons le système*

$$\dot{X} = F(X) + d(t) \tag{7.30}$$

où $F(\cdot)$ et $d(\cdot)$ sont des fonctions de classe C^1, $d(\cdot)$ converge vers zéro, appartient à $L^1([0,+\infty))$ et est telle que

$$\int_0^{+\infty} |d(s)|ds \leq D \tag{7.31}$$

pour une constante $D \geq 0$. Supposons qu'il existe une fonction définie positive et radialement non bornée $V(X)$ de classe C^1 et une fonction définie positive $W(X)$ de classe C^1 telles que

$$\frac{\partial V}{\partial X}(X)F(X) = -W(X)\;,\;\left|\frac{\partial V}{\partial X}(X)\right| \leq 1\;. \tag{7.32}$$

Alors toutes les trajectoires de (7.30) convergent vers l'origine.

Ce résultat est très similaire à [L4, Theorem B.1] et nous le démontrons pas.

Hypothèse A3. Cette hypothèse est satisfaite parceque la paire (M,C) avec $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ and $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ est observable.

Chapitre 8

Système de congestion de type TCP

Dans ce chapitre (voir [62], [39]), nous allons étudier la stabilité asymptotique de la famille suivante de systèmes dynamiques

$$\dot{x}(t) \ = \ \kappa \left[w - x(t-\tau)p(x(t-\tau)) \right], \tag{8.1}$$

où $x \in \mathbb{R}$ et où κ, w sont des nombres réels positifs. Dans un premier temps, nous considérerons le cas où la fonction $p(\cdot)$ est de classe C^1, positive, croissante, concave et bornée par 1 et dans un deuxième temps, nous relâcherons l'hypothèse de régularité en supposant que $p(x)$ est seulement continue. En pratique, la variable $x(t)$ ne peut jamais être négative.

A notre connaissance, ce modèle a été proposé par Kelly dans [K1] pour décrire les dynamiques d'une collection de flots, employant tous une ressource unique et ayant en commun le même gain κ. Le retard τ représente le temps de recirculation, et est supposé constant. La fonction $p(\cdot)$ peut être interprétée comme une fraction de paquets indiquant une congestion potentielle [DS]. De plus, les hypothèses sur la fonction $p(\cdot)$ sont naturelles dans le contexte d'un comportement de type TCP (voir, par exemple, [K1, DS, SS], et les références incluses).

L'objectif de ce chapitre est d'analyser la stabilité du système (8.1) en utilisant les outils et les méthodes développées pour l'étude de la stabilité et de la commande de systèmes à retard. Plus précisément, nous déterminerons une borne supérieure sur le retard qui assure que toutes les solutions possibles du système convergent vers le point d'équilibre du système. Pour prouver ce résultat, nous construirons une fonctionnelle de type Lyapunov-Krasovskii en utilisant les spécificités des non linéarités du système (8.1). Observons qu'une approche de type Lyapunov-Razumikhin a été proposée par Deb et Srikant dans [DS] pour analyser la stabilité de (8.1) avec κ et w choisis comme nous l'avons précisé plus haut. Observons que la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii que nous allons proposer est nouvelle et prend en compte certaines particularités du système : la forme de la non linéarité $p(\cdot)$ ainsi que la contrainte de positivité de $x(t)$ pour tout t.

8.1 Analyse de stabilité de type Lyapunov-Krasovskii

Dans cette section, nous présentons et démontrons les résultats principaux de ce travail.

8.1.1 Fonction $p(\cdot)$ continûment différentiable

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 41 *Considérons le système (8.1). Supposons que $p(\cdot)$ est une fonction de classe C^1 positive, croissante, bornée en norme par 1 et telle que $p'(\cdot)$ est décroissante et $\lim_{x\to+\infty} p(x) = 1$. Supposons que le retard est tel que*

$$0 \leq \tau \leq \frac{1}{4\kappa} \ . \tag{8.2}$$

Alors toutes les solutions du système (8.1) positives ou nulles pour tout $t \geq -\tau$ convergent vers l'unique point d'équilibre du système lorsque le temps va vers l'infini.

Remarque 42 *Le théorème 41 ne traite que des solutions positives ou nulles car en pratique la variable x ne peut prendre des valeurs négatives.*

Remarque 43 *Puisque $p'(\cdot)$ est décroissante, $p(\cdot)$ est une fonction concave.*

Preuve.
Point d'équilibre. Les propriétés satisfaites par la fonction $p(x)$ garantissent que la fonction $P(x) = xp(x)$ est croissante et telle que

$$P(0) \ = \ 0 \ , \ \lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty \ . \tag{8.3}$$

Puisque $w > 0$, il s'en suit qu'il existe une unique valeur $x_* > 0$ telle que

$$w \ = \ x_* p(x_*) \ . \tag{8.4}$$

Changement de coordonnées. L'objectif est maintenant de prouver que le point d'équilibre x_* est globalement asymptotiquement stable sur le domaine de définition du système (8.1). Pour faciliter l'analyse, nous effectuons le changement de coordonnée

$$X \ = \ x - x_* \tag{8.5}$$

et utilisons la notation

$$F(X) \ = \ -\kappa \left[w - (X + x_*) p(X + x_*) \right] \ . \tag{8.6}$$

La fonction $F(X)$ satisfait $F(0) = 0$ et le système (8.1) est transformé par (8.5) et (8.6) en

$$\dot{X} \ = \ -F(X(t-\tau)) \ . \tag{8.7}$$

Fonction de Lyapunov. Considérons la fonction

$$V(X) \ = \ \int_0^X F(s) ds \tag{8.8}$$

définie sur $[-x_*, +\infty[$. Les égalités

$$F(s) = -\kappa \left[x_* p(x_*) - (s + x_*) p(s + x_*) \right] = \kappa \left[x_* (-p(x_*) + p(s + x_*)) + sp(s + x_*) \right] \tag{8.9}$$

permettent de voir que $sF(s)$ est définie positive. On en déduit que V est définie positive sur $[-x_*, +\infty[$. De plus (8.3) implique que

$$\lim_{X \to +\infty} F(X) \ = \ +\infty \tag{8.10}$$

ce qui à son tour implique que

$$\lim_{X \to +\infty} V(X) \ = \ +\infty \ . \tag{8.11}$$

Dérivée de la fonction de Lyapunov. La dérivée de la fonction $V(\cdot)$ le long des trajectoires de (8.7) satisfait

$$\begin{array}{rcl} \dot{V} & = & -F(X(t))^2 + F(X(t))[F(X(t)) - F(X(t-\tau))] \\ & \leq & -\frac{1}{2} F(X(t))^2 + \frac{1}{2} [F(X(t)) - F(X(t-\tau))]^2 \ . \end{array} \tag{8.12}$$

Un calcul direct donne

$$F'(X) \ = \ \kappa \left(p(X + x_*) + (X + x_*) p'(X + x_*) \right) \ . \tag{8.13}$$

D'un autre côté, la fonction $p'(s)$ est décroissante. En conséquence, pour tout $s \geq 0$, on a

$$p(s) - p(0) \ = \ \int_0^s p'(l) dl \ \geq \ sp'(s) \geq 0 \ . \tag{8.14}$$

Il s'en suit que

$$0 \;\leq\; F'(X) \;\leq\; \kappa\left(p(X+x_*)+p(X+x_*)-p(0)\right) \leq 2\kappa \tag{8.15}$$

car $p(s) \in [0,1]$. Cette propriété et (8.12) impliquent que

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}F(X(t))^2 + 2\kappa^2[X(t)-X(t-\tau)]^2 \ . \tag{8.16}$$

Les égalités

$$[X(t)-X(t-\tau)]^2 = \left(\int_{t-\tau}^{t} \dot{X}(s)ds\right)^2 = \left(\int_{t-\tau}^{t} F(X(s-\tau))ds\right)^2 \tag{8.17}$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwartz (voir Section 3.1) conduisent à

$$[X(t)-X(t-\tau)]^2 \;\leq\; \tau\left(\int_{t-\tau}^{t} F(X(s-\tau))^2 ds\right) \;=\; \left(\int_{t-2\tau}^{t-\tau} F(X(l))^2 dl\right) \ . \tag{8.18}$$

En combinant cette inégalité et (8.16), on obtient

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}F(X(t))^2 + 2\tau\kappa^2\left(\int_{t-2\tau}^{t-\tau} F(X(s))^2 ds\right) \ . \tag{8.19}$$

Fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii. La dérivée le long des trajectoires de (8.1) de la fonctionnelle

$$U(X_t) \;=\; V(X(t)) + \frac{1}{8\tau}\int_{t-2\tau}^{t}\left(\int_{s}^{t} F(X(l))^2 dl\right)ds \tag{8.20}$$

satisfait

$$\begin{aligned} \dot{U} \;&\leq\; -\tfrac{1}{2}F(X(t))^2 + 2\tau\kappa^2\int_{t-2\tau}^{t-\tau} F(X(s))^2 ds - \frac{1}{8\tau}\int_{t-2\tau}^{t} F(X(l))^2 dl + \frac{1}{4}F(X(t))^2 \\ &\leq\; -\tfrac{1}{4}F(X(t))^2 - \tfrac{1}{8\tau}\left(1-16\tau^2\kappa^2\right)\int_{t-2\tau}^{t} F(X(l))^2 dl \ . \end{aligned} \tag{8.21}$$

La propriété (8.2) implique que

$$\dot{U} \;\leq\; -\frac{1}{4}F(X(t))^2 \ . \tag{8.22}$$

Analyse de stabilité. En intégrant (8.22), on déduit que pour tout $t \geq 2\tau$

$$U(X_t) \;\leq\; U(X_{2\tau}) - \frac{1}{4}\int_{2\tau}^{t} F(X(s))^2 ds \ . \tag{8.23}$$

La définition de $U(\cdot)$ implique que pour tout $t \geq 2\tau$

$$V(X(t)) \;\leq\; U(X_{2\tau}) \ . \tag{8.24}$$

Puisque $X(t) \geq -x_*$ pour tout $t \geq -\tau$, (8.24) et (8.11) impliquent que $X(t)$ est bornée. Il s'en suit que $|\dot{X}(t)|$ est bornée. Ceci implique que $X(t)$ et $F(X(t))^2$ sont des fonctions de classe C^1 de t. D'un autre côté, (8.23) implique que, pour tout $t \geq 2\tau$,

$$\int_{2\tau}^{t} F(X(s))^2 ds \;\leq\; 4U(X_{2\tau}) \ . \tag{8.25}$$

Il s'en suit que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{2\tau}^{t} F(X(s))^2 ds \tag{8.26}$$

existe et est finie. Puisque $F(X(t))^2$ est uniformément continue, le lemme de Barbalat (voir [K2, Lemma 4.2]) s'applique et implique que

$$\lim_{t\to+\infty} F(X(t)) = 0 \ . \tag{8.27}$$

La fonction $F(\cdot)$ est définie positive : il s'en suit que

$$\lim_{t\to+\infty} X(t) = 0 \ . \tag{8.28}$$

Ceci termine notre démonstration.

8.1.2 Fonction $p(x)$ continue

Dans cette section, nous ne supposons plus que $p(\cdot)$ est de classe C^1. Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 44 *Considérons le système (8.1). Supposons que $p(\cdot)$ est continue, positive ou nulle, croissante et bornée en norme par 1 et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = 1$. Supposons que pour tout $\beta > 0$ et pour tout $\gamma \in [0, \beta[$,*

$$\frac{p(\beta)}{\beta} \ \geq \ \frac{p(\beta) - p(\gamma)}{\beta - \gamma} \ . \tag{8.29}$$

Supposons que le retard est tel que

$$0 \leq \tau \leq \frac{1}{4\kappa} \ . \tag{8.30}$$

Alors toutes les solutions du système (8.1) positives ou nulles pour tout $t \geq -\tau$ convergent vers l'unique point d'équilibre du système quand le temps va vers l'infini.

Remarque 45 *On peut prouver que (8.29) est satisfaite dans le cas particulier où $p(\cdot)$ est une fonction concave de la façon suivante. En supposant que $p(\cdot)$ est concave, alors, pour tout $l \in [0, 1]$ et $\beta > 0$,*

$$p(l\beta + (1-l)0) \ \geq \ lp(\beta) + (1-l)p(0) \ .$$

Puisque $\gamma \in [0, \beta[$, alors $\frac{\gamma}{\beta} \in [0, 1]$. Il s'en suit en particulier que l'inégalité

$$p\left(\frac{\gamma}{\beta}\beta + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)0\right) \ \geq \ \frac{\gamma}{\beta}p(\beta) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)p(0)$$

est vérifiée. Puisque $\left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)p(0) \geq 0$, l'inégalité

$$p(\gamma) \ \geq \ \frac{\gamma}{\beta}p(\beta)$$

est obtenue. Cette inégalité est équivalente à (8.29).

Preuve. Observons d'abord que la continuité de $p(\cdot)$ implique que les solutions sont définies pour tout $t \geq 0$: chaque solution $x(t)$ n'est simplement que l'intégrale d'une fonction continue.

Maintenant, la preuve peut être menée à bien d'une façon similaire à celle du théorème 41, pourvu que les hypothèses du théorème 44 garantissent que $F(\cdot)$ est définie comme en (8.6) et vérifie

$$|F(Z_1) - F(Z_2)| \ \leq \ 2\kappa |Z_1 - Z_2| \tag{8.31}$$

pour tout $Z_1 \geq -x_*$, $Z_2 \geq -x_*$. En effet, dans la démonstration du théorème 41, la propriété de différentiabilité de $p(\cdot)$ n'a été utilisée que pour prouver que $F(\cdot)$ était globalement Lipschitz sur $[-x_*, +\infty[$ avec 2κ pour constante de Lipschitz.

Pour établir (8.31), supposons tout d'abord que $Z_2 \geq Z_1$. D'après la définition de $F(\cdot)$,

$$\begin{aligned}|F(Z_1) - F(Z_2)| &= \kappa|(Z_1 + x_*)p(Z_1 + x_*) - (Z_2 + x_*)p(Z_2 + x_*)| \\ &= \kappa|(Z_1 - Z_2)p(Z_1 + x_*) + (Z_2 + x_*)(p(Z_1 + x_*) - p(Z_2 + x_*))| \\ &\leq \kappa(Z_2 - Z_1) + \kappa|(Z_2 + x_*)(p(Z_1 + x_*) - p(Z_2 + x_*))| \ .\end{aligned} \tag{8.32}$$

De (8.29), nous déduisons que

$$\frac{p(Z_2 + x_*)}{Z_2 + x_*} \ \geq \ \frac{p(Z_2 + x_*) - p(Z_1 + x_*)}{Z_2 - Z_1} \ . \tag{8.33}$$

Il s'en suit que

$$(Z_2 - Z_1)p(Z_2 + x_*) \ \geq \ (Z_2 + x_*)[p(Z_2 + x_*) - p(Z_1 + x_*)] \ \geq \ 0 \ . \tag{8.34}$$

En combinant cette inégalité et (8.32) on obtient

$$\begin{aligned}|F(Z_1) - F(Z_2)| &\leq \kappa(Z_2 - Z_1) + \kappa(Z_2 - Z_1)p(Z_2 + x_*) \\ &\leq 2\kappa(Z_2 - Z_1) = 2\kappa|Z_1 - Z_2| \ .\end{aligned} \tag{8.35}$$

Bien entendu, quand $Z_2 \leq Z_1$, la même inégalité est vérifiée. Ceci termine notre démonstration.

Chapitre 9

Modèle de bateau sous-actionné

Le positionnement dynamique d'un navire est nécessaire dans bien des opérations qui ont lieu dans les champs pétrolifères marins. Il est essentiel que le positionnement dynamique du navire soit effectué par un contrôle précis et sûr et cela en présence de perturbations environnementales et de changement de configuration comme une réduction du nombre d'entrées disponibles. Cette réduction peut être le résultat d'une panne d'actionneur ou d'une décision délibérée de limiter le nombre des actionneurs en raison de questions de coût ou des considérations de poids.

Dans cette partie, nous considérons le problème du contrôle dynamique du positionnement d'un bateau qui n'a pas de propulseurs sur les côtés, mais deux propulseurs indépendants localisés à distance de la ligne centrale afin de procurer les forces de commande nécessaires. Le problème de commande considéré dans ce chapitre consiste à trouver des lois de commande qui stabilisent à la fois les variables de position et l'orientation, en utilisant seulement les deux commandes disponibles. Puisque nous voulons commander trois degrés de liberté, au moyen de seulement deux commandes indépendantes, nous faisons face à un problème de commande sous actionné.

La commande des systèmes sous actionnés fait suite aux recherches sur les systèmes non holonomes. Depuis plus de 10 ans, les systèmes non holonomes ont constitué un sujet qui a grandement intéressé la communauté des automaticiens. La commande de ces systèmes s'est révélée être un problème difficile, fondamentalement non linéaire et ne pouvant être inséré par un moyen ou par un autre au sein de la théorie des systèmes linéaires. Une présentation globale des travaux sur le sujet se trouve dans [KM]. Notons en particulier que la stabilisation de variétés d'équilibre et l'utilisation de lois de commande discontinues ont été proposées dans [BM] et [B] et que C. Samson dans [S2] a été le premier à montrer comment des lois de commande non autonomes peuvent être employées pour stabiliser asymptotiquement l'origine des systèmes non holonomes, et ce en particulier pour un chariot modélisé par un système non holonome.

Le contrôle d'un bateau sous actionné est un sujet qui génère beaucoup d'activités de recherche : voir [G, FGBL, BOF, PN, S1, B1]. Le problème de stabilisation de ce système présente une difficulté puisque les résultats de [B2, CR, Z] permettent d'affirmer que ce système n'est pas même stabilisable localement par loi de commande indépendante du temps. En revanche, il est localement commandable (voir [PE]) et par conséquent, grâce à [C2], on sait que ce système est localement uniformément asymptotiquement stabilisable au moyen d'une loi de commande régulière dépendant du temps de façon périodique. Toutefois, puisqu'un bateau sous actionné n'est pas un système commandable sans dérive, les résultats de [C1, C2] ne permettent pas de savoir si ce système est globalement asymptotiquement stabilisable par loi de commande régulière dépendante du temps.

Dans [R] une loi de commande discontinue est proposée ; elle donne une propriété de convergence exponentielle vers le point d'équilibre désiré, sous certaines hypothèses sur la condition initiale. Dans [PE], une loi de commande dépendante du temps et périodique permet de stabiliser localement le point d'équilibre désiré du système et cela d'une manière exponentielle relativement à une certaine dilatation. Ce résultat est local et aucune estimée du bassin d'attraction n'est connue. Dans [PN], une approche au moyen de lois de commande périodiques en temps est proposée afin d'obtenir un résultat d'exponentielle stabilité semi globale pratique pour un modèle de bateau simplifié.

Dans ce qui va suivre, nous considérons un modèle complet du bateau et apportons une solution au problème ouvert qu'est celui de déterminer les expressions explicites de lois de commande d'état régulières qui dépendent du temps de façon périodique et rendent l'origine globalement uniformément asymptotiquement stable (voir [23], [15], [69]). Le résultat est obtenu au moyen d'une construction de type Lyapunov et utilise de façon essentielle les résultats de construction de fonctions de Lyapunov strictes que nous avons vu à la section 6.1.

9.1 Modèle de bateau

Nous reprenons les équations présentées dans [F] :

$$\left\{\begin{array}{lll} \dot{u} & = & \frac{m_{22}}{m_{11}}vr - \frac{d_{11}}{m_{11}}u + \frac{1}{m_{11}}\tau_1 \ , \\ \dot{v} & = & -\frac{m_{11}}{m_{22}}ur - \frac{d_{22}}{m_{22}}v \ , \\ \dot{r} & = & \frac{m_{11}-m_{22}}{m_{33}}uv - \frac{d_{33}}{m_{33}}r + \frac{1}{m_{33}}\tau_3 \ . \end{array}\right. \tag{9.1}$$

Les variables u, v et r représentent les diverses vitesses des variables décrivant la position système. Les paramètres $m_{ii} > 0$ résultent de l'inertie du navire. Les paramètres $d_{ii} > 0$ résultent de la stabilisation hydrodynamique. Les variables de commande sont τ_1 et τ_3. Les cinématiques du bateau sont décrites par

$$\left\{\begin{array}{lll} \dot{x} & = & \cos(\psi)u - \sin(\psi)v \ , \\ \dot{y} & = & \sin(\psi)u + \cos(\psi)v \ , \\ \dot{\psi} & = & r \ , \end{array}\right. \tag{9.2}$$

où x, y et ψ sont la position et l'orientation du bateau par rapport à un repère fixé à la terre. Pour simplifier, nous effectuons le changement global de coordonnées de [PE]

$$z_1 = \cos(\psi)x + \sin(\psi)y \ , \ z_2 = -\sin(\psi)x + \cos(\psi)y \ , \ z_3 = \psi \ , \tag{9.3}$$

qui donne

$$\left\{\begin{array}{lll} \dot{z}_1 & = & u + z_2 r \ , \\ \dot{z}_2 & = & v - z_1 r \ , \\ \dot{z}_3 & = & r \ . \end{array}\right. \tag{9.4}$$

9.2 Stabilisation par loi de commande : résultat principal

Nous commençons par transformer les dynamiques (9.1), (9.4) au moyen d'un changement de loi de commande et de coordonnées afin de faciliter le problème de stabilisation que nous considérons.

9.2.1 Transformations

Après le changement de lois de commande

$$\begin{array}{lll} \tau_u & = & \frac{m_{22}}{m_{11}}vr - \frac{d_{11}}{m_{11}}u + \frac{1}{m_{11}}\tau_1 \ , \\ \tau_r & = & \frac{m_{11}-m_{22}}{m_{33}}uv - \frac{d_{33}}{m_{33}}r + \frac{1}{m_{33}}\tau_3 \ , \end{array} \tag{9.5}$$

le système (9.1) se simplifie de la façon suivante

$$\left\{\begin{array}{lll} \dot{u} & = & \tau_u \ , \\ \dot{v} & = & -cur - dv \ , \\ \dot{r} & = & \tau_r \ , \end{array}\right. \tag{9.6}$$

avec $c = \frac{m_{11}}{m_{22}}$, $d = \frac{d_{22}}{m_{22}}$. Pour supprimer v du sous système (9.4), nous introduisons la variable :

$$Z_2 = z_2 + \frac{v}{d} \; . \tag{9.7}$$

Le sous système en (z_1, z_2) de (9.4) devient

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = u + Z_2 r - \frac{v}{d} r \; , \\ \dot{Z}_2 = -c\frac{ur}{d} - z_1 r \; . \end{cases} \tag{9.8}$$

Pour introduire un terme stabilisateur dans l'équation en z_1, nous effectuons le changement de coordonnées

$$u = -\frac{d}{c} z_1 - \frac{d}{c} \mu \tag{9.9}$$

qui, avec le changement de loi de commande

$$\tau_\mu = \frac{d}{c} z_1 + \frac{d}{c} \mu - Z_2 r + \frac{v}{d} r - \frac{c}{d} \tau_u \; , \tag{9.10}$$

conduit finalement au système

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\frac{d}{c} z_1 - \frac{d}{c}\mu + Z_2 r - \frac{v}{d} r \; , \\ \dot{Z}_2 = \mu r \; , \\ \dot{z}_3 = r \; , \\ \dot{v} = -dv + d(z_1 + \mu) r \; , \\ \dot{\mu} = \tau_\mu \; , \\ \dot{r} = \tau_r \; . \end{cases} \tag{9.11}$$

Nous pouvons maintenant établir le résultat suivant :

Théorème 46 *Le système (9.11) est globalement uniformément asymptotiquement stabilisé par toute loi de commande qui stabilise globalement uniformément asymptotiquement le système*

$$\begin{cases} \dot{Z}_2 = \mu r \; , \\ \dot{z}_3 = r \; , \\ \dot{\mu} = \tau_\mu \; , \\ \dot{r} = \tau_r \; . \end{cases} \tag{9.12}$$

De plus, si une expression explicite de fonction de Lyapunov stricte pour le système (9.12) en boucle fermée est connue, alors une expression explicite de fonction de Lyapunov stricte pour le système (9.11) en boucle fermée peut être construite.

Preuve. En adaptant la proposition 4.11 de [SJK] au cas des systèmes variant dans le temps, on peut démontrer facilement que les lois de commande qui stabilisent globalement uniformément asymptotiquement le système (9.12) stabilisent aussi globalement uniformément asymptotiquement le système (9.11). La construction de fonctions de Lyapunov strictes pour (9.11) peut être effectuée en empruntant les outils utilisés dans [M2] pour construire des fonctions Lyapunov strictes.

9.2.2 Résultat principal

Théorème 47 *Considérons les équations (9.11). Soient k_2, k_3, k_μ, k_r des paramètres strictement positifs tels que $1 \geq k_2 \geq k_3$. Le système est globalement uniformément asymptotiquement stabilisé par les lois de commande*

$$\begin{aligned} \tau_\mu &= -k_\mu(\mu - \mu_f) + \dot{\mu}_f - \lambda\left[Z_2 + 2Z_3 k_2 \cos(t)\right] r \; , \\ \tau_r &= -k_r(r - r_f) + \dot{r}_f - \lambda\left[Z_2\mu_f + 2Z_3 + 2Z_3 k_2 \cos(t)\mu_f\right] \; , \end{aligned} \tag{9.13}$$

où

$$\lambda = 2 + \frac{k_3}{3} - \frac{k_3 \sin(2t)}{6} \frac{2V_1 + V_1^2}{(1+V_1)^2} \ , \tag{9.14}$$

$$Z_3 \ = \ z_3 + k_2 \cos(t) Z_2 \ , \tag{9.15}$$

$$V_1(Z_2, Z_3) \ = \ Z_2^2 + 2Z_3^2 \ , \tag{9.16}$$

$$\mu_f \ = \ -\frac{\sin(t) Z_2^2}{2(0.001 + Z_2^2)} \ , \tag{9.17}$$

$$r_f \ = \ \frac{-k_3 Z_3 + k_2 \sin(t) Z_2}{1 + k_2 \cos(t) \mu_f} \ , \tag{9.18}$$

et $\dot{\mu}_f, \dot{r}_f$ *sont les dérivées de* μ_f, r_f *le long des solutions du système en boucle fermée.*

9.3 Preuve du théorème 47

D'après le théorème 46, le problème de stabiliser globalement uniformément asymptotiquement le système (9.11) se réduit au problème de stabiliser globalement uniformément asymptotiquement le système (9.12). Nous allons résoudre ce dernier problème au moyen de l'approche *backstepping*. Dans une première étape, nous déterminons les expressions de lois de commande pour le sous système en (Z_2, z_3) de (9.12) avec μ et r considérés comme des entrées virtuelles et dans une seconde étape nous exploitons la connaissance de ces lois de commande stabilisantes pour stabiliser le système (9.12). Nous construirons une fonction de Lyapunov stricte pour le système (9.12) car la connaissance d'une telle fonction nous permettra d'exploiter des résultats de *backstepping* robuste pour proposer des expressions de lois de commande assez simples.

9.3.1 Stabilisation du sous système en (Z_2, z_3)

Considérons le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{Z}_2 & = & \mu_f r_f \ , \\ \dot{z}_3 & = & r_f \ , \end{array} \right. \tag{9.19}$$

avec pour entrées μ_f, r_f. D'après le théorème de Brockett [B2], nous savons qu'il n'existe pas de loi de commande continue indépendante du temps qui stabilise localement asymptotiquement ce système. Mais on sait que lorsqu'un système sans dérive (9.19) est commandable il peut être stabilisé globalement uniformément asymptotiquement par des lois de commande non autonomes. Pour obtenir les expressions explicites de telles lois de commande, nous effectuons le changement de variable dépendant du temps (9.15). Un simple calcul donne

$$\dot{Z}_3 \ = \ r_f(1 + k_2 \cos(t) \mu_f) - k_2 \sin(t) Z_2 \ . \tag{9.20}$$

Nous imposons a priori à $k_2 \mu_f$ de n'être pas plus grand en norme que $\frac{1}{2}$. Cette propriété garantit que la loi de commande définie en (9.18), où k_3 est un paramètre de réglage strictement positif, est un choix possible pour r_f. Avec un tel choix, le système (9.19) devient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{Z}_2 & = & \frac{-k_3 Z_3 + k_2 \sin(t) Z_2}{1 + k_2 \cos(t) \mu_f} \mu_f \ , \\ \dot{Z}_3 & = & -k_3 Z_3 \ . \end{array} \right. \tag{9.21}$$

Bien sûr, il existe de nombreuses lois de commande μ_f telles que $|k_2 \mu_f| \leq \frac{1}{2}$ qui stabilisent globalement uniformément asymptotiquement le système (9.21). Quoiqu'il en soit, nous nous centrons sur le cas particulier de la loi de commande donnée en (9.17).

Grâce à l'inégalité triangulaire et les inégalités $1 \geq k_2 \geq k_3$, on peut facilement vérifier que la dérivée de la fonction de Lyapunov définie en (9.16) le long des trajectoires du système en boucle fermée (9.21) satisfait

$$\dot{V}_1 \ \leq \ -\sin^2(t) W_1(Z_2, Z_3) - \tfrac{k_3}{2} Z_3^2 \tag{9.22}$$

avec

$$W_1(Z_2,Z_3) = \frac{k_2 Z_2^4}{3(0.001+Z_2^2)} + \frac{k_3}{2} Z_3^2 \geq \gamma(V_1(Z_2,Z_3)) \ , \ \gamma(s) = \frac{k_3 s^2}{8(1+s)} \ . \tag{9.23}$$

La technique de construction de fonctions de Lyapunov strictes de [M4], présentée à la section 6.1, permet de montrer que, pour le système en boucle fermée, la fonction

$$V_2 = 2V_1 + \frac{k_3}{6} V_1 + \left(\frac{\pi}{4} + \int_t^{t+\frac{\pi}{2}} \cos^2(s) ds\right) \gamma(V_1) \tag{9.24}$$

est une fonction de Lyapunov stricte qui vérifie les inégalités

$$2V_1 \leq V_2 \leq (2+k_3) V_1 \ , \ \dot{V}_2 \leq -\gamma(V_1) < 0, \quad \forall (Z_2,Z_3) \neq (0,0) \ . \tag{9.25}$$

D'après le [K2, Theorem 3.8], il s'en suit que l'origine du système (9.19) en boucle fermée avec les lois de commande (9.17)(9.18) est globalement uniformément asymptotiquement stable.

9.3.2 Lois de commande stabilisantes pour le système (9.12)

Dans cette section, nous appliquons la technique de l'ajout d'intégrateur pour obtenir des expressions explicites de lois de commande stabilisantes pour le système (9.12). Grâce aux calculs de la section précédente, nous savons que la dérivée le long des trajectoires de (9.12) de la fonction de Lyapunov

$$V_2 \ = \ \left(2 + \frac{k_3}{3}\right) V_1 - \sin(2t) \frac{k_3 V_1^2}{6(1+V_1)} \tag{9.26}$$

satisfait

$$\dot{V}_2 \quad \leq \quad -\gamma(V_1) - \frac{k_3}{2} Z_3^2 + \left[\frac{\partial V_2}{\partial Z_2} + \frac{\partial V_2}{\partial Z_3} k_2 \cos(t)\right] [(\mu - \mu_f) r + \mu_f (r - r_f)] + \frac{\partial V_2}{\partial Z_3} [r - r_f] \tag{9.27}$$

et que ses dérivées partielles sont

$$\frac{\partial V_2}{\partial Z_2} = 2\lambda Z_2 \ , \quad \frac{\partial V_2}{\partial Z_3} = 4\lambda Z_3 \tag{9.28}$$

où λ est la fonction définie en (9.14). Nous en déduisons que

$$\dot{V}_2 \ \leq \ -\Gamma \tag{9.29}$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma \quad = \quad & \gamma(V_1) + \frac{k_3}{2} Z_3^2 - 2\lambda \left[Z_2 + 2Z_3 k_2 \cos(t)\right] (\mu - \mu_f) r \\ & -2\lambda \left[Z_2 \mu_f + 2Z_3\right] (r - r_f) - 4\lambda Z_3 k_2 \cos(t) \mu_f (r - r_f) \ . \end{aligned} \tag{9.30}$$

Considérons maintenant la fonction

$$V_3 \ = \ V_2 + (\mu - \mu_f)^2 + (r - r_f)^2 \ . \tag{9.31}$$

Sa dérivée le long des trajectoires du système (9.12) satisfait

$$\dot{V}_3 \ \leq \ -\Gamma + 2(\mu - \mu_f)(\tau_\mu - \dot{\mu}_f) + 2(r - r_f)(\tau_r - \dot{r}_f) \ . \tag{9.32}$$

Pour déduire de cette inégalité des expressions de lois de commande stabilisantes pour (9.12), on doit déterminer les expressions de $\dot{\mu}_f$ et $\dot{r}_f$. Des calculs immédiats donnent

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_f \quad &= \quad -\frac{\cos(t)}{2} \frac{Z_2^2}{0.001+Z_2^2} - \sin(t) \frac{0.001 Z_2}{(0.001+Z_2^2)^2} \mu r \ , \\ \dot{r}_f \quad &= \quad \frac{-k_3(r - k_2 \sin(t) Z_2 + k_2 \cos(t) \mu r)}{1 + k_2 \cos(t) \mu_f} + \frac{k_2(\cos(t) Z_2 + \sin(t) \mu r)}{1 + k_2 \cos(t) \mu_f} + \frac{k_2(k_3 Z_3 - k_2 \sin(t) Z_2)[-\sin(t)\mu_f + \cos(t)\dot{\mu}_f]}{(1 + k_2 \cos(t)\mu_f)^2} \ . \end{aligned} \tag{9.33}$$

Alors, en choisissant les lois de commande (9.13), nous obtenons

$$\dot{V}_3 \ \leq \ -\gamma(V_1) - \frac{k_3}{2} Z_3^2 - 2k_\mu (\mu - \mu_f)^2 - 2k_r (r - r_f)^2 \tag{9.34}$$

ce qui implique que l'origine du système (9.12) en boucle fermée avec la loi de commande (9.13) est globalement uniformément asymptotiquement stable.

Remarque 48 *Il est bien connu que la technique* backstepping *est très flexible : de nombreux des types de lois de commande peuvent être déduits de cette technique. Les lois de commande (9.13) sont obtenues par suppression des termes et en conséquence ont des formules compliquées. Des expressions bien plus simples peuvent être obtenues en adoptant une stratégie de domination des termes. Cette technique de* backstepping *robuste peut être appliquée grâce à notre connaissance de fonction de Lyapunov strictes pour le sous système en* (Z_2, Z_3)*. On peut trouver des expressions explicites de fonctions strictement positives régulières* $K_\mu(Z_2, Z_3, \mu, r), K_r(Z_2, Z_3, \mu, r)$ *telles que les lois de commande*

$$\tau_\mu = -K_\mu(Z_2, Z_3, \mu, r)(\mu - \mu_f) , \ \tau_r = -K_r(Z_2, Z_3, \mu, r)(r - r_f) \tag{9.35}$$

stabilisent globalement uniformément asymptotiquement le système (9.12).

Chapitre 10

Suivi de trajectoire pour un modèle de chémostat

Depuis une trentaine d'années, le problème de la commande des bio-procédés est étudié. D'importants domaines applicatifs motivent celui-ci : questions relatives à l'agro-alimentaire, au domaine pharmaceutique, au traitement des eaux usées. La plupart des dispositifs utilisés dans les contextes industriels que nous venons de mentionner sont assimilables à des chémostats, (appelés aussi réacteur continûment mélangés) d'où l'intérêt de développer des techniques de régulation pour les chémostats. Dans ce chapitre, nous allons résoudre un problème de régulation par retour de sortie au moyen d'une technique reposant sur la construction d'un observateur grand gain (voir [8]).

10.1 Rappels

10.1.1 Contexte

Dans un travail récent (cf. [HRM]), une nouvelle loi de commande régulant la sortie d'un processus auto-catalytique a été présentée. Alors que l'essentiel des études consacrées à ce système emploient comme variable de commande le débit en entrée Q, dans le papier précédemment cité la commande a été réalisée au moyen d'une boucle de recirculation. Parmi d'autres avantages, cette approche a celui d'éviter que soit nécessaire un bac de stockage à l'entrée du procédé et que le débit en entrée soit connu de façon exacte.

10.1.2 Modélisation

La fonction $D(t) = Q(t)/V$ étant donnée, le modèle de ce système s'exprime ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X} & = & \mu(S)X + uD(t)\,(X_{in} - X) \\ \dot{S} & = & -\dfrac{\mu(S)}{Y}X + uD(t)\,(S_{in} - S) \end{array} \right. \tag{10.1}$$

où S et X sont les concentrations en biomasse et en substrat (en mg/l) dans le réacteur et $u = \frac{\alpha+\beta}{1+\beta} \in [0,1]$ est la variable de commande, $\mu(S)$ est le taux de croissance de la biomasse (en t^{-1}), Y est le taux de conversion (en mg de substrat consommé par mg de biomasse formé) et V le volume du réacteur (en l). Toutes ces quantités sont supposées connues.

S_{in} et X_{in} sont les entrées inconnues de concentrations de substrat et de biomasse (en mg/l), pouvant varier dans le temps mais bornées :

$$(X_{in}(t), S_{in}(t)) \in [\underline{X}_{in}, \overline{X}_{in}] \times [\underline{S}_{in}, \overline{S}_{in}],\ \forall t \geq 0\ ,$$

où $\overline{X}_{in} \geq \underline{X}_{in} \geq 0$ et $\overline{S}_{in} \geq \underline{S}_{in} > 0$ sont des nombres connus.

Le problème de commande étudié dans cette partie est celui de la régulation de la sortie

$$S_{out} = uS + (1-u)S_{in} \tag{10.2}$$

même si S_{in} est inconnue. Nous considérons une trajectoire de référence à suivre que nous notons $S^{\star}_{out}(\cdot)$ et introduisons l'hypothèse suivante.

Hypothèse H0. Il existe des réels $\overline{S}^{\star}_{out} \geq \underline{S}^{\star}_{out} > 0$ tels que $S^{\star}_{out}(t) \in [\underline{S}^{\star}_{out}, \overline{S}^{\star}_{out}]$ pour tout $t \geq 0$, avec

$$\overline{S}^{\star}_{out} < \underline{S}_{in} \ .$$

10.1.3 Régulation de S_{out} quand S_{in} est connue

Dans cette section, nous rappelons le résultat que nous avons obtenu quand S_{in} est connue de façon exacte [HRM]. Nous introduisons les hypothèses habituelles faites sur la fonction de croissance $\mu(\cdot)$.

Hypothèse H1. La fonction $\mu(\cdot)$ est une fonction Lipschitz continue, positive satisfaisant $\mu(0) = 0$ et $\mu(\underline{S}^{\star}_{out}) > 0$ qui de plus est telle que

$$\mu(S) \geq \mu(\underline{S}^{\star}_{out}), \quad \forall S \in [\underline{S}^{\star}_{out}, \overline{S}_{in}] \ . \tag{10.3}$$

Contrairement aux approches habituelles, pour lesquelles le débit en entrée D est la variable de commande, D est, dans notre contexte, imposée. Nous supposons toutefois qu'elle est bornée avec des bornes connues.

Hypothèse H2. Il existe des réels $\underline{D} \leq \overline{D}$ et $T \geq 0$ tels que $D(t) \in [\underline{D}, \overline{D}]$ pour tout $t \geq T$, avec $\underline{D} > 0$ et

$$\overline{D} < \mu(\underline{S}^{\star}_{out}) \frac{\underline{X}_{in} + Y(\underline{S}_{in} - \underline{S}^{\star}_{out})}{Y(\overline{S}_{in} - \underline{S}^{\star}_{out})} \ . \tag{10.4}$$

Nous avons alors le résultat suivant (cf. [HRM]) :

Proposition 49 *Supposons que H0, H1, H2 sont satisfaites par le système (10.1). Alors, pour toute condition initiale telle que $X(0) > 0$ et $0 \leq S(0) < \overline{S}_{in}$, la loi de commande*

$$u^{\star}(t, S, S_{in}) = \frac{S_{in} - S^{\star}_{out}(t)}{S_{in} - \min\{S^{\star}_{out}(t), S\}} \tag{10.5}$$

conduit la sortie $S_{out}(\cdot)$, définie en (10.2), vers la sortie $S^{\star}_{out}(\cdot)$ et ceci en temps fini.

Quand S_{in} est inconnue, nous allons montrer dans ce qui va suivre de quelle façon construire un observateur pour S_{in} quand sont satisfaites certaines hypothèses peu restrictives (section 10.2). Puis dans la section 10.3, nous montrerons de quelle manière coupler cette estimation avec la loi de commande (10.5) pour réaliser la régulation de la sortie.

10.2 Observateur de concentration en entrée

Dans la plupart des approches connues, la régulation de la concentration en substrat à la sortie d'un bioprocédé nécessite la connaissance de la concentration du substrat à l'entrée du procédé. Quoiqu'il en soit, un certain nombre de raisons économiques et pratiques rend la mesure de la concentration du substrat en entrée difficile. Aussi, une estimation précise de cette entrée exogène est elle appréciée. A notre connaissance, seulement quelques approches ont été spécifiquement mises au point pour estimer les concentrations en entrée inconnues d'un biosystème (voir [ATHS], [SQ] et [TPH]).

Nous proposons maintenant un nouvel observateur, qui a de l'intérêt indépendamment de notre objectif de commande :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\widehat{S}} & = & -\frac{\mu(S)}{Y}X + uD(t)(\widehat{S}_{in} - S) + uD(t)(\theta+\theta^2)(S-\widehat{S}), \\ \dot{\widehat{S}}_{in} & = & uD(t)\theta^3(S-\widehat{S}), \end{array}\right. \tag{10.6}$$

où $\theta > 1$ est un paramètre de réglage. La seule hypothèse sur la fonction inconnue $S_{in}(\cdot)$ que nous imposons est qu'elle a une dérivée première bornée.

Hypothèse H3. La fonction $S_{in}(\cdot)$ est différentiable et il existe $M < +\infty$ tel que $|\dot{S}_{in}(t)| \leq M$, pour tout temps t.

Proposition 50 *Sous l'hypothèse H3, pour toute loi de commande $u(\cdot)$ telle que $\inf_{t\geq 0} u(t)D(t) = \gamma > 0$ et pour toutes conditions initiales positives de (10.1)–(10.6) telles que $\widehat{S}(0) = S(0)$ et $\widehat{S}_{in}(0) \in [\underline{S}_{in}, \overline{S}_{in}]$, alors l'estimation de S_{in} procurée par (10.6) satisfait l'inégalité suivante, pour tout $t \geq 0$*

$$|\widehat{S}_{in}(t) - S_{in}(t)| \leq \frac{2M}{\theta-1} + \frac{\theta}{\theta-1}(\overline{S}_{in} - \underline{S}_{in})e^{-\gamma\theta t} \ . \tag{10.7}$$

Remarque 51 *Quand S_{in} est constant ($M = 0$), la convergence (10.7) de l'observateur est exacte. Quand $S_{in}(\cdot)$ a des variations inconnues, la convergence (10.7) est, selon la terminologie d'usage, dite pratique.*

Preuve. Définissons les variables d'erreur $e_S = \widehat{S} - S$ et $e_{S_{in}} = \widehat{S}_{in} - S_{in}$, dont les dynamiques, obtenues de façon directes, sont

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} e_S \\ e_{S_{in}} \end{array}\right] = u(t)D(t)A\left[\begin{array}{c} e_S \\ e_{S_{in}} \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} 0 \\ \dot{S}_{in} \end{array}\right] \ , \text{ avec } , \ A = \left[\begin{array}{cc} -\theta-\theta^2 & 1 \\ -\theta^3 & 0 \end{array}\right] \ .$$

On peut vérifier facilement que les valeurs propres de A sont $-\theta$ et $-\theta^2$. Remarquons aussi qu'en raison du choix des conditions initiales de (10.6), on a

$$e_S(0) = 0, \quad |e_{S_{in}}(0)| \leq \overline{S}_{in} - \underline{S}_{in} \ . \tag{10.8}$$

Considérons la paramétrisation en temps

$$\tau := \int_0^t u(s)D(s)ds \geq \gamma t, \quad t \geq 0 \tag{10.9}$$

et définissons la fonction

$$\psi(\tau) = \frac{\frac{dS_{in}}{dt}(\tau)}{u(\tau)D(\tau)} \in \left[-\frac{M}{\gamma}, \frac{M}{\gamma}\right] \ . \tag{10.10}$$

Ceci nous conduit à écrire les dynamiques

$$\frac{d}{d\tau}\left[\begin{array}{c} e_S \\ e_{S_{in}} \end{array}\right] = A\left[\begin{array}{c} e_S \\ e_{S_{in}} \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} 0 \\ \psi(\tau) \end{array}\right] \ . \tag{10.11}$$

Considérons le changement de variables

$$z_1 = \theta e_S - e_{S_{in}}, \quad z_2 = -\theta^2 e_S + e_{S_{in}} \ . \tag{10.12}$$

On peut vérifier facilement que

$$\frac{dz_1}{d\tau} = -\theta z_1 + \psi(\tau), \quad \frac{dz_2}{d\tau} = -\theta^2 z_2 - \psi(\tau) \ ,$$

ce qui implique (grâce à (10.10)) que les inégalités

$$|z_i(\tau)| \leq \frac{M}{\gamma\theta^i} + |z_i(0)|e^{-\theta^i\tau} \quad (i=1,2) \tag{10.13}$$

sont satisfaites. Grâce aux équations (10.12) et (10.13), on déduit facilement l'inégalité

$$|e_{S_{in}}(\tau)| \leq \frac{(\theta+\theta^{-1})\frac{M}{\gamma} + \theta^2(|z_1(0)|+|z_2(0)|)e^{-\theta\tau}}{\theta^2-\theta} \ .$$

Enfin, de (10.8), on a que $|z_i(0)| \leq \overline{S}_{in} - \underline{S}_{in}$ $(i=1,2)$. Donc l'estimation de l'erreur annoncée est garantie :

$$|\widehat{S}_{in}(t) - S_{in}(t)| \leq \frac{2M}{\theta-1} + \frac{\theta}{\theta-1}(\overline{S}_{in} - \underline{S}_{in})e^{-\gamma\theta t} \ .$$

10.3 Couplage de l'observateur avec la loi de commande

Commençons par définir la fonction de saturation $sat_{[\underline{S}_{in},\overline{S}_{in}]}$ par

$$sat_{[\underline{S}_{in},\overline{S}_{in}]}(\sigma) = \max\{\underline{S}_{in}, \min\{\overline{S}_{in},\sigma\}\} \ .$$

Alors, le couplage de la loi de commande (10.5) avec l'observateur (10.6) conduit au résultat suivant.

Proposition 52 *Sous les hypothèses H0, H1, H2, H3, pour toute condition initiale* $X(0)>0$, $\widehat{S}(0) = S(0) \in [0,\overline{S}_{in}[$ *et* $\widehat{S}_{in}(0) \in [\underline{S}_{in},\overline{S}_{in}]$, *le retour dynamique de sortie*

$$\widetilde{u}^*(t,S,\widehat{S}_{in}) := u^*(t,S,sat_{[\underline{S}_{in},\overline{S}_{in}]}(\widehat{S}_{in})) \tag{10.14}$$

où $u^*(\cdot)$ *est définie en (10.5) et* $\widehat{S}_{in}$ *est donné par (10.6), possède la propriété suivante*

$$\limsup_{t\geq 0} |S_{out}(t) - S^*_{out}(t)| \leq \Omega$$

avec

$$\Omega = \frac{2M}{\theta-1}\left(1 - \frac{\underline{S}_{in} - \overline{S}^*_{out}}{\overline{S}_{in}}\right) \ .$$

Remarque 53 *Notons que* $\widetilde{u}^*(\cdot)$ *est bien définie en raison de la saturation et de l'hypothèse H0.*

Preuve. De l'hypothèse H1, on déduit immédiatement que le domaine $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*_+ \times [0,\overline{S}_{in}[$ est invariant par (10.1), et ce pour toute loi de commande positive $u(\cdot)$. Considérons une condition initiale $(X(0),S(0)) \in \mathcal{D}$ et notons $(X(\cdot),S(\cdot))$ la solution du système (10.1) avec la loi de commande (10.14). Employons aussi la notation

$$\widetilde{u}(t) = \widetilde{u}^*(t,S(t),\widehat{S}_{in}(t)) \ .$$

Observons que les hypothèses H0 et H2 conduisent à l'inégalité

$$\widetilde{u}(t) \geq \underline{u} = (1 - \overline{S}^*_{out}/\underline{S}_{in}) > 0 \ .$$

En conséquence, il existe $T'>0$ tel que $S(t) \leq S^*_{out}(t)$ pour tout $t \geq T'$ (voir Lemme 54). Posons $\widetilde{S}_{in}(t) = sat_{[\underline{S}_{in},\overline{S}_{in}]}(\widehat{S}_{in}(t))$ et $\widetilde{e}_{S_{in}}(t) = \widetilde{S}_{in}(t) - S_{in}(t)$. Il s'en suit que, pour tout $t \geq T'$,

$$\begin{aligned} S_{out}(t) &= \frac{\widetilde{S}_{in}(t) - S^*_{out}(t)}{\widetilde{S}_{in}(t) - S(t)}(S(t) - S_{in}(t)) + S_{in}(t) \\ &= S^*_{out}(t) - \widetilde{e}_{S_{in}}(t)\underbrace{\left(1 - \frac{\widetilde{S}_{in}(t) - S^*_{out}(t)}{\widetilde{S}_{in}(t) - S(t)}\right)}_{\Gamma(t)} \end{aligned}$$

où $0 \leq \Gamma(t) \leq \overline{\Gamma} = 1 - (\underline{S}_{in} - \overline{S}^*_{out})/\overline{S}_{in}$. Alors

$$|S_{out}(t) - S^*_{out}(t)| \leq |\widehat{S}_{in}(t) - S_{in}(t)|\overline{\Gamma}, \tag{10.15}$$

pour tout $t \geq T'$. Finalement, observons que $u(t)D(t) \geq \gamma = \underline{u}\,\underline{D} > 0$, pour $t \geq T$, et concluons grâce à la proposition 50 :

$$|S_{out}(t) - S^*_{out}(t)| \to \left[0, \frac{2M}{\theta - 1}\overline{\Gamma}\right] \text{ quand } t \to +\infty \; .$$

10.4 Lemme technique

Lemme 54 *Supposons que les hypothèses H0, H1, H2 sont satisfaites par le système (10.1). Pour toute condition initiale* $(X(0), S(0)) \in \mathbb{R}^*_+ \times [0, \overline{S}_{in}[$ *et pour toute loi de commande telle que* $\underline{u} = \inf_{t \geq 0} u(t) > 0$*, la variable* S *reste au dessous de* $\underline{S}^*_{out}$ *après un temps fini.*

Preuve. On déduit de façon directe que, pour toute loi de commande positive $u(\cdot)$, le domaine $\mathbb{R}^*_+ \times [0, \overline{S}_{in}[$ est invariant par (10.1). Effectuons le changement de variables $(S, Z) = (S, X + YS)$:

$$\begin{aligned} \dot{S} = F(t, S, Z) &= u(t)D(t)(S_{in}(t) - S) - \frac{\mu(S)}{Y}(Z - YS), \\ \dot{Z} &= -u(t)D(t)(Z - Z_{in}(t)) \end{aligned}$$

où $Z_{in} = X_{in} + YS_{in}$. Remarquons que, pour tout $t \geq 0$, $Z_{in}(t) \in [\underline{Z}_{in}, \overline{Z}_{in}]$, où $\underline{Z}_{in} = \underline{X}_{in} + Y\underline{S}_{in}$ et $\overline{Z}_{in} = \overline{X}_{in} + Y\overline{S}_{in}$. Ainsi, de $u(t)D(t) \geq \underline{u}\,\underline{D} > 0$, nous déduisons que $Z(t)$ converge exponentiellement vers $[\underline{Z}_{in}, \overline{Z}_{in}]$.

Remarquons que $S \in [\underline{S}^*_{out}, \overline{S}_{in}[$ implique, pour tout $t \leq T$, l'inégalité suivante

$$F(t, S, Z) \leq (\overline{D} - \mu(\underline{S}^\star_{out}))(\overline{S}_{in} - S) - \frac{\mu(S)}{Y}(\underline{Z}_{in} - Y\overline{S}_{in}) + \frac{\mu(S)}{Y}(\underline{Z}_{in} - Z) \; . \tag{10.16}$$

En $S = \underline{S}^*_{out}$, on a

$$F(t, \underline{S}^*_{out}, Z) \leq -\delta + \frac{\mu(\underline{S}^*_{out})}{Y}(\underline{Z}_{in} - Z)$$

où $\delta = \mu(\underline{S}^\star_{out})(\underline{Z}_{in} - Y\underline{S}^\star_{out})/Y - \overline{D}(\overline{S}_{in} - \underline{S}^\star_{out})$ (notons que la condition (10.4) garantit que $\delta > 0$). Mais la convergence de Z vers l'intervalle $[\underline{Z}_{in}, \overline{Z}_{in}]$ implique l'existence de $T_1 \geq T$ tel que

$$F(t, \underline{S}^*_{out}, Z) \leq -\frac{\delta}{2} < 0, \quad t \geq T_1 \; .$$

En conséquence, l'existence d'un instant fini $T_2 \geq T_1$ tel que $S(T_2) \leq \underline{S}^*_{out}$ implique que la variable $S(t)$ reste sous $\underline{S}^*_{out}$ pour tout $t \geq T_2$. Nous montrons maintenant qu'un tel instant T_2 existe nécessairement.

Si un tel instant T_2 n'existe pas, alors $S(t) > \underline{S}^*_{out}$ pour tout $t \geq T_1$. Nous distinguons trois cas :

Cas 1. $\underline{Z}_{in} > Y\overline{S}_{in}$ et $\overline{D} \leq \mu(\underline{S}^\star_{out})$ (notons que la condition (10.4) est nécessairement remplie), alors (10.16) et la convergence de $Z(\cdot)$ vers $[\underline{Z}_{in}, \overline{Z}_{in}]$, implique l'existence de $T_3 \geq T_1$ tel que

$$F(t, S, Z(t)) \leq -\frac{1}{2}\frac{\mu(\underline{S}^\star_{out})}{Y}(\underline{Z}_{in} - Y\overline{S}_{in}) < 0$$

pour tout $t \geq T_3$. Nous concluons que $S(\cdot)$ atteint $\underline{S}^\star_{out}$ en temps fini, ce qui amène à une contradiction.

Cas 2. Si $\underline{Z}_{in} > Y\overline{S}_{in}$ et $\overline{D} > \mu(\underline{S}^\star_{out})$, nous obtenons, de (10.16) et (10.4), l'inégalité suivante

$$F(t, S, Z) \leq -\delta + \frac{\mu(S)}{Y}(\underline{Z}_{in} - Z) \; .$$

Les propriétés asymptotiques de $Z(\cdot)$ nous permettent d'écrire

$$F(t,S,Z(t)) \leq -\frac{\delta}{2} < 0, \quad t \geq T_3'$$

pour un certain $T_3' \geq T_1$. Ainsi, nous obtenons une contradiction.

Cas 3. Si $\underline{Z}_{in} \leq Y\overline{S}_{in}$, alors la condition (10.4) garantit que $\overline{D} < \mu(\underline{S}^\star_{out})$. On peut alors écrire, pour tout $t \geq T_1$, d'après (10.1) et (10.3), les inégalités suivantes

$$\begin{array}{rcl}
\dot{X} & \geq & (\mu(\underline{S}^\star_{out}) - \overline{D})X \ , \\
\dot{S} & \leq & -(\mu(\underline{S}^\star_{out}) - \overline{D})\dfrac{X}{Y} + \dfrac{\overline{D}}{Y}(Y\overline{S}_{in} - \underline{Z}_{in}) + \dfrac{\overline{D}}{Y}(\underline{Z}_{in} - Z(t)).
\end{array}$$

Puisque $X(T_1)$ est positive, $X(\cdot)$ est croissante et il existe $\gamma > 0$, $T_1' \geq T_1$ tels que $(\mu(\underline{S}^\star_{out}) - \overline{D})X(t) > \overline{D}(Y\overline{S}_{in} - \underline{Z}_{in}) + \gamma$ pour tout $t \geq T_1'$. De la convergence de $Z(\cdot)$, nous déduisons qu'il existe $T_3'' \geq T_1'$ tel que

$$\dot{S}(t) \leq -\frac{\gamma}{2Y} < 0, \quad t \geq T_3'' \ .$$

Ceci à nouveau conduit à une contradiction.

Quatrième partie

Conclusions générales et perspectives

Chapitre 11

Conclusions générales et perspectives

Conclusions générales

Ce manuscrit m'a permis de réaliser un bilan non exhaustif de mes activités de recherche menées depuis la soutenance de ma thèse. Celles-ci ont porté sur les trois grands domaines de recherche relatifs aux systèmes dynamiques que sont ceux de la commande et de l'analyse de stabilités des systèmes non-linéaires autonomes et sans retards, des systèmes à retard et des systèmes variant dans le temps.

La première de ces familles de systèmes est celle qui a été et est encore, et de très loin, la plus étudiée. Son intérêt est loin d'être épuisé et les constructions de fonctions de Lyapunov strictes pour de tels systèmes vérifiant les conditions du théorème de Jurdjevic-Quinn ou du théorème de Matrosov que j'ai effectué récemment contribuent à l'illustrer la richesse des problèmes présentés par cette famille fondamentale de systèmes.

Une littérature bien moindre est consacrée aux deux autres familles de systèmes précédemment citées et ce bien qu'elles présentent, tant d'un point de vue théorique qu'applicatif, au moins autant d'intérêts et de richesses que celle des systèmes autonomes et sans retard. En raison des difficultés qu'elles présentent, leurs études se sont, du moins jusqu'à une époque récente et en dépit d'exceptions notables telles que l'étude des systèmes ne vérifiant pas les condition nécessaire de stabilisabilité de Brockett, essentiellement limitée au cas de systèmes linéaires. Je me suis attaché à montrer que les difficultés occasionnées par la présence de retards et par la dépendance en temps, peuvent être surmontés en développant des techniques nouvelles permettant de prouver des résultats de stabilité globale et robuste.

Pour les systèmes à retard, j'ai adapté la technique du *forwarding*, du *backstepping* et réalisé des constructions de fonctionnelles de Razumikhin ou de Krasovskii afin d'obtenir des caractérisations de la stabilité ou des technique de constructions de lois de commandes *dépendantes de la taille des retards*.

Pour les systèmes variant dans le temps, j'ai réalisé des constructions systématiques de fonctions de Lyapunov strictes permettant de prouver la stabilité et de stabiliser des systèmes *de façon robuste*.

Ces avancées théoriques ont des intérêts applicatifs très clairs, ainsi que je l'ai illustré dans la partie de ce mémoire que j'ai consacré aux applications.

Perspectives

La plupart des travaux que j'ai présenté sont susceptibles de faire l'objet d'extensions, que moi même, ou d'autres, pourront réaliser. Plus spécifiquement je souhaite, dans des contextes éventuels de directions de thèses,

1) Unir les résultats de construction de fonctions de Lyapunov pour les systèmes non autonomes à ceux de construction de fonctionnelles de Lyapunov stricte et d'ainsi contribuer au problème de l'analyse de la stabilité de systèmes non linéaires non autonomes et à retard.

2) Travailler à l'utilisation de la présence d'un retard pour obtenir des résultat de stabilisation par retour de sortie pour des systèmes non linéaire.

3) Mettre au point une technique de synthèse de lois de commande adaptatives robustes au moyen de la technique de construction de fonctions de Lyapunov stricte pour des systèmes vérifiant les conditions du théorème de Matrosov.

Quoiqu'il en soit, mon prochain objectif sera tout particulièrement de contribuer à la compréhension et au contôle de systèmes issus de l'écologie microbienne et des procédés biologiques de dépollution et ce dans le cadre de ma participation au projet MERE INRIA-INRA.

Rappelons qu'un écosystème est un système en lequel diverses populations de micro-organismes inter-agissent entre elles et réagissent à des pramêtres environnementaux. Les concepts de compétition, de prédation, de symbiose sont employés pour décrire ces interactions et essayer de comprendre des caractéristiques comportementales cruciales telles que le biodiversité et la productivité d'écosystèmes.

L'intérêt de ces systèmes est grand. D'un point de vue applicatif, celui-ci est manifeste. Les enjeux liés à la mise en valeur des ressources en eau et à la dépollution sont planétaires, immenses et de plus en plus, hélas, d'actualité. Pour les appréhender, une bonne compréhension des systèmes biologiques déjà existants, une amélioration ou une adaptation de ceux-ci, ainsi que la mise au point de techniques de commande pour ces familles de systèmes sont nécessaire.

D'un point de vue théorique, les spécificités offertes par ces systèmes les rendent particulièrement intéressant. En effet, les diverses variables de ces systèmes ainsi que les loi de commandes potentielles de ceux-ci sont positives. Il s'en est déjà suivit de riches développements de théories mathématiques et automatiques originales auxquels je souhaite contribuer. La présence fréquentes de retards ainsi que l'aspect non-autonomes de bon nombre de ces systèmes m'autorisent à penser que mes travaux passés m'aideront, de façon direct ou indirecte, à résoudre les problèmes relatifs à la compréhension du comportement de ces systèmes ainsi qu'à leur contrôle robuste.

En particulier je prévoie

1) De construire des fonctions de Lyapunov strictes pour des systèmes positifs possédant un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable (sur l'orthant positif). Les outils dont je dispose pour réaliser celles-ci sont d'une part les technique nouvelles de constructions de fonctions de Lyapunov strictes pour les systèmes variant dans le temps et d'autre part la construction récente de fonctions de Lyapunov strictes pour les systèmes vérifiant les conditions du théorème de Matrosov. Les célèbres équations de Lodka-Volterra ainsi que celles décrivant le phénomène d'exclusion compétitive satisfont les hypothèses de ce théorème.

2) Utiliser les constructions réalisées pour analyser le degré de robustesse des systèmes considérés et résoudre des problèmes de stabilisations robustes qui se posent. Notons que les questions relatives à la robustesse de la stabilité des systèmes issus de la biologie sont d'une importance toute particulière en raison des importantes incertitudes présentées par les modèles : certains paramètres peuvent être mal connus et varier avec le temps, des dynamiques peuvent ne pas être modélisées.

3) Adapter les constructions réalisées afin de prendre en compte la présence de retards ponctuels ou distribués.

4) Considérer des problèmes de retour de sortie pour des familles de systèmes biologiques. Ces problèmes se posent naturellement en raison de la difficulté très fréquente qu'il y a à mesurer ou à mesurer avec exactitude certaines des variables de ces systèmes.

Bibliographie

[A] D. ANGELI. *Input-to-State Stability of PD-controlled robotic systems*, Automatica, Vol. 35, pp. 1285-1290, 1999.

[AP1] D. AEYELS, J. PEUTEMAN. *A New Asymptotic Stability Criterion for Nonlinear Time-Variant Differential Equations.* IEEE Trans. on Automatic Control, **43** (7), pp. 968-971, 1998.

[AP2] D. AEYELS, J. PEUTEMAN. *New criteria for exponential and uniform asymptotic stability of nonlinear time-variant differential equations.* 36th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, Californio, 1997.

[A1] H.I. ANSOFF. *Stability of linear oscillating systems with constant time lag.* J. Appl. Mech. **16** pp. 158-164, 1949.

[AK] H.I. ANSOFF, J.A. KRUMHANSL. *A general stability criterion for linear oscillating systems with constant time lag.* Quart. Appl. Math. **6** pp. 337-341, 1948.

[A2] S. ARTSTEIN. *Linear systems with delayed controls : a reduction.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-27, No. 4, 869-879, 1982.

[ATHS] C. AUBRUN, D. THEILLIOL, J. HARMAND, J.P. STEYER. *Software sensor design for codestimation in an anaerobic fluidized bed reactor.* Water Science and Technology 43, 115-122, 2001.

[BK] E.A. BARBASHIN, N.N. KRASOVSKII. *Dokl. Akad. Nauk, SSSR*, **86**, 453-456 (in Russian), 1957.

[BOF] S.P. BERGE, K. OHTSU, T.I. FOSSEN. *Nonlinear control of ships minimizing the position tracking errors.* IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems, Fukuoka, Japan, Oct. pp. 141-147, 1998.

[B] A.M. BLOCH. *Stabilizability of nonholonomic control systems.* Automatica, Vol. 28, No. 2, pp. 431-435, 1992.

[BM] A.M. BLOCH, N.H. MCCLAMROCH. *Control of mechanical systems with classical nonholonomic constraints.* 28th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 201-205, Tampa, Florida 1989.

[B2] R.W. BROCKETT. *Asymptotic stability and feedback stabilization*, in Proc. Conf. held at Michigan Technological University, June-July 1982, Progress in Math., Vol. 27, Birkhauser, pp. 181-208, 1983.

[B1] F. BULLO. *Stabilization of relative equilibria for underactuated systems on Riemannian manifolds.* Automatica, Vol. 36, No. 12, pp. 1819-1834, 2000.

[BI] C. BYRNES, A. ISIDORI. *New results and examples in nonlinear feedback stabilization.* Systems & Control Letters, Vol. 12 pp. 437-442, 1989.

[C1] J.M. CORON. *Global Asymptotic Stabilization for Controllable Systems without Drift.* Mathematics of Cont. Sign. and Systems, Vol. 5, pp. 295-312, 1992.

[C2] J.M. CORON. *On the stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback law.* SIAM J. Control and Optimization Vol. 33, No. 3, pp. 804-833, 1995.

[CP] J.M. CORON, L. PRALY. *Adding an integrator for the stabilization problem.* Systems & Control Letters, Vol. 17, pp. 89-104, 1991.

[CR] J.M. Coron, L. Rosier. *A relation between continuous time-varying and discontinuous feedback stabilization.* Journal of Math. Syst. Estimation and control, Vol. 4, No. 1, pp. 67-84, 1994.

[DS] S. Deb, R. Srikant. *Global stability of congestion controllers for the Internet.* IEEE Transactions on Automatic Control, 48(6) : pp. 1065-1060, June 2003.

[FP1] L. Fauboug, J.-B. Pomet. *Control Lyapunov functions for homogeneous " Jurdjevic-Quinn " systems*, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations. Vol. 5, 293-311, june 2000.

[F] T.I. Fossen. *Guidance and Control of Ocean Vehicles,* John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 1994.

[FGBL] T.I. Fossen, J.M. Godhavn, S.P. Berge, K.P. Lindegaard. *Nonlinear control of underactuated ships with forward speed compensation.* IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Design, Enschede, The Netherlands, pp. 121-126, 1998.

[FK] R. Freeman, P.V. Kokotovic. *Robust Nonlinear Control Design.* Birkhauser (Systems & Control : Foundation & Applications), Boston, 1996.

[FP2] R. Freeman, L. Praly. *Integrators Backstepping for Bounded Controls and Control Rates.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 43, pp. 258-262, 1998.

[G] J.M. Godhavn. *Nonlinear tracking of underactuated surface vessels.* In Proc. 35th IEEE Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, pp. 987-991, 1996.

[GSB] F. Grognard, R. Sepulchre, G. Bastin. *Global stabilization of feedforward systems with exponentially unstable Jacobian linearization.* Systems & Control Letters, vol. 37, no. 2, pp. 107-115, 1999.

[GN] K. Gu, S.-I. Niculescu. *Additional dynamics in transformed time delay systems.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 45, pp. 572-575, 2000.

[H] W. Hahn. *Stability of Motion*. Springer-Verlag, New York, 1967.

[HV] J.K. Hale, S.M. Verduyn Lunel. *Introduction to functional differential equations*. Applied Math, Sciences, 99, Springer-Verlag, New-York, 1993.

[HRM] J. Harmand, A. Rapaport, F. Mazenc. *Output tracking of continuous bioreactors through recirculation and by-pass.* Automatica, Volume 42, Issue 6, pp. 1025-1032 (June 2006)

[I] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems II*. Springer-Verlag, ISBN185233 1887, London, 1999.

[J1] M. Jankovic. *Control Lyapunov-Razumikhin Functions for Time Delay Systems.* 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, 1999.

[J2] M. Jankovic. *Control Lyapunov-Razumikhin Functions and Robust Stabilization of Time Delay Systems.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 46, (7), pp. 1048-1060, 2001.

[JSK] M. Jankovic, R. Sepulchre, P.V. Kokotovic. *Constructive Lyapunov stabilization of nonlinear cascade systems.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-41, No.12, 1723-1735, 1996.

[JK] Z.P. Jiang, I. Kanellakopoulos. *Global Output-Feedback Tracking for a Benchmark Nonlinear System* IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 45, no. 5, pp. 1023–1027, 2000.

[JN1] Z.P. Jiang, H. Nijmeijer. *Tracking control of mobile robots : a case study in backstepping.* Automatica, **33** (7), pp. 1393-1399, 1997.

[JN2] Z.P. Jiang, H. Nijmeijer. *A Recursive Technique for Tracking Control of Nonholonomic Systems in Chained Form.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.42, no.2, pp.265-279, 1999.

[JQ] V. Jurdjevic, J.P. Quinn. *Controllability and stability.* Journal of differential equations, Vol. 4, pp. 381-389, 1978.

[K1] F.P. Kelly, Mathematical modelling of the internet. in *Mathematics unlimited - 2001 and beyond* (Eds. B. Engquist, W. Schmid), Springer-Verlag : Berlin, pp. 685-702, 2001.

[K2] H. Khalil. *Nonlinear Systems.* 2nd ed. Prentice Hall, 1996.

[K3] A.A. Kolesnikov. *Analytical construction of nonlinear algebraic regulators with given invariant manifolds,* Izv. Buisshix Uchevnix Savedenii, Electromexanica, No. 3, pp. 100-109, 1987. See also : ibid No. 5, pp. 58-66.

[KM] I. Kolmanovsky, N.H. McClamroch. *Developments in nonholonomic control problems.* IEEE Control Systems Magazine, Vol. 15, No. 6, pp. 20-36, 1995.

[K4] N.N. Krasovskii. *Stability of Motion.* Stanford : Stanford University Press, 1963.

[KSW] M. Krichman, E.D. Sontag, Y. Wang. *Input-output-to-state stability.* SIAM J. Contr. Optimiz. Vol. 39, pp. 1874-1928, 2001.

[KD] M. Kristic, H. Deng. *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems,* Springer-Verlag, London, 1998.

[KKK] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, P.V. Kokotovic. *Nonlinear and adaptive control design.* John Wiley & Sons, New York, 1995.

[K5] J. Kurzweil. *On the inversion of Liapunov's second theorem on stability of motion.* A.M.S. Translation Ser II, Vol. 24 pp. 19-77, 1956.

[L1] J.P. LaSalle. *Stability theory for ordinary differential equations.* Journal of Differential Equations, **4** pp. 57-65, 1968.

[L2] J.P. LaSalle. *Some extensions of Lyapunov's second method.* IRE Trans. Circuit Theory, CT-7(4) : 520-527, December 1960.

[L3] E. Lefeber. *Tracking Control of Nonlinear Mechanical Systems.* Ph.D Thesis, University of Twente, 2000.

[L4] W. Lin. *Input Saturation and Global Stabilization of Nonlinear Systems via State and Output Feedback.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.40, No. 4, pp. 776-782, 1995.

[LCS] W. Liu, Y. Chitour, E. Sontag. *On Finite Gain Stability of Linear Systems Subject to Input Saturation.* SIAM J. Control and Optimization Vol. 34, pp. 1190-1219, 1996.

[MO] A.Z. Manitius, A.W. Olbrot. *Finite spectrum assignment problem for systems with delays.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-24, No. 4, 541-553, 1979.

[MI] L. Marconi, A. Isidori. *Robust global stabilization of a class of uncertain feedforward nonlinear systems.* Systems & Control Letters, Vol. 41, pp. 281-290, 2000.

[M1] V.M. Mastrosov. *On the stability of motion.* J. Appl. Math. Mech., Vol. 26, pp. 1337-1353, 1962.

[M2] F. Mazenc. *Interconnected Nonlinear Systems, Local and Global Stabilization.* Systems & Control Letters, **35** (5), pp. 317-323, 1998.

[M3] F. Mazenc. *Stabilization of Feedforward Systems Approximated by a Nonlinear Chain of Integrators.* Systems & Control Letters, Vol. 32, no.4, pp.223-229, 1997.

[M4] F. Mazenc. *Strict Lyapunov Functions for Time-varying Systems.* Automatica, Vol. 39, pp. 349-353, 2003.

[MB] F. Mazenc, S. Bowong. *Tracking trajectories of the cart-pendulum system.* Automatica, Vol. 39, pp. 677-684, 2003.

[MI] F. Mazenc, A. Iggidr. *Backstepping with bounded feedbacks.* Systems & Control Letters, Vol 51/3-4, pp. 235-245, 2004.

[MM] **F. Mazenc, M. Malissoff.** *Further Constructions of Control-Lyapunov Functions and Stabilizing Feedbacks for Systems Satisfying the Jurdjevic-Quinn Conditions.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 51, No.2, pp. 360- 365, February 2006.

[MMN1] F. Mazenc, S. Mondié, S. Niculescu. *Global Asymptotic Stabilization for Chains of Integrators with a Delay in the Input.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 48, no.1, pp.57-63, 2003.

[MMN2] F. Mazenc, S. Mondié, S. Niculescu. *Global Stabilization of Oscillators With Bounded Delayed Input.* Systems & Control Letters, 53 pp. 415-422, 2004 et Proceedings of the 41th IEEE Conference on decision and control, Las Vegas, 2002.

[MN1] F. Mazenc, S. Niculescu. *Lyapunov Stability Analysis for Nonlinear Delay Systems.* Systems & Control Letters, **42** (4), 245-251, 2001.

[MN2] F. Mazenc, H. Nijmeijer. *Discrete-time Forwarding in Nonlinear Systems.* Int. J. Control, Vol. 71, No.5, pp. 823-835, 1998.

[MP1] F. Mazenc, L. Praly. *Adding an integration and Global asymptotic stabilization of feedforward systems.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.41, no.11, pp.1559-1578, 1996.

[MP2] F. Mazenc, L. Praly. *Strict Lyapunov Functions for Feedforward Systems and Applications.* 39th CDC Conference, Sydney 2000.

[MP3] F. Mazenc, L. Praly. *Asymptotic Tracking of a State Reference for Systems with a Feedforward Structure.* Automatica, **36** (2), pp. 179-187, 2000

[MSR] W. Michiels, R. Sepulchre, D. Roose. *Stability of Perturbed Delay Differential Equations and Stabilization of Nonlinear Cascade Systems.* SIAM Journal of Control and Optimization 40(3), pp. 661-680, 2002.

[M5] N. Minorsky. *Self-excited oscillations in dynamical systems possessing retarded actions.* J. Applied Mech. **9** A65-A71, 1942.

[MDS] S. Mondié, M. Dambrine, O. Santos. *Approximation of control laws with distributed delays : a necessary condition for stability.* IFAC Symposium on Systems, Structure and Control, Prague, Czek Republic, August 2001.

[MLC] S. Mondié, R. Lozano, J. Collado. *Resetting Process-Model Control for Unstable Systems with Delay.* 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, FL, USA, pp. 2247-2252, 2001.

[M6] I.H. Mufti. *A note on the stability of an equation of third order with time lag.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-9, pp. 190-191, 1964.

[N1] K.S. Narendra, A.M. Annaswamy. *Persistent excitation in adaptive systems.* Int. Journal of Control, **45**, 127-160, 1987.

[OV] R. Outbib, J.C. Vivalda. *On the stabilization of smooth nonlinear systems,* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 44, no 1, pp. 200-202, 1999.

[P] Z.J. Palmor. *Time delay compensation-Smith predictor and its modifications*, in The Control Handbook, (W.S. Levine, Eds), CRSC Press, 224-237, 1996.

[PE] K.Y. Pettersen, O. Egeland. *Exponential stabilization of an underactuated surface vessel.* 35th IEEE Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, pp. 967-971, 1996.

[PN] K.Y. Pettersen, H. Nijmeijer. *Global practical stabilization and tracking for an underactuated ship - a combined averaging and backstepping approach.* In Proc. IFAC Conference on Systems Structure Control, Nantes, France, pp. 59-64, 1998.

[PW] L. Praly, Y. Wang. *Stabilization in spite of matched unmodeled dynamics and an equivalent definition of input-to-state stability.* MCSS, Vol. 9, pp. 1-33, 1996.

[R] M. Reyhanoglu. *Control and stabilization of an underactuated surface vessel,* 35th IEEE Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, pp. 2371-2376, 1996.

[S1] C. Samson, *Control of Chained Systems Application on Path Following and Time-Varying Point-Stabilization of Mobile Robots.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 40, pp. 64-77, 1995.

[S2] C. Samson. *Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart.* In Proc. Int. Workshop on Nonlinear and Adaptive Control : Issues in Robotics, Grenoble, France, 1990. Proc. in Advanced Robot Control 162, Springer Verlag, pp. 125-151, 1991.

[SJK] R. Sepulchre, M. Jankovic, P.V. Kokotovic. *Constructive Nonlinear Control.* Springer-Verlag, London, 1996.

[SS] S. Shakkottai, R. Srikant. *How good are deterministic fluid models of internet congestion control.* IEEE INFOCOM 2002, New York, NY, USA.

[S1] H. Sira-Ramirez. *On the control of the underactuated ship : A trajectory planning approach.* 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, AZ, pp. 1658-1663, 1999.

[S2] O.J.M. Smith. *Closer Control of loops with dead time.* Chem. Eng. Prog.,53, 217-219, 1959.

[S3] E.D. Sontag. *Smooth Stabilization Implies Corpime Factorization.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 34, pp. 435-443, 1988.

[S4] E.D. Sontag. *A "universal" construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization.* Systems & Control Letters, **13**, 117-123, 1989.

[SW] E.D. Sontag, Y. Wang. *On Characterization of the input-to-state stability property.* Systems & Control Letters, **24**, 351-359, 1995.

[ST] E.D. Sontag, A. Teel. *Changing Supply Functions in Input/State Stable System.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 40, pp. 1476-1478, 1995.

[SQ] M. Sperandio, I. Queinnec. *On-line estimation of wastewater nitrifiable nitrogen, nitrification and denitrification rates using orp and do dynamics.* Water Science and Technology 49, 31-38, 2004.

[SSY] H.J. Sussmann, E.D. Sontag, Y. Yang. *A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-39, 2411-2425, 1994.

[TKJ] Y. Tan, I. Kanellakopoulos, Z.-P. Jiang. *Nonlinear observer/controller design for a class of nonlinear systems.* 37th CDC Conference, Tampa 1998.

[T1] A. Teel. *Using saturation to stabilize a class of single-input partially linear composite systems.* Proc. IFAC Nonlinear Contr. Syst. Design Symp., Bordeau, France, June 1992.

[T2] A. Teel. *On L_2 performance induced by feedbacks with multiple saturations.* ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations. Vol. 1, pp. 225-240, 1996.

[T3] A. Teel. *Feedback stabilization : nonlinear solutions to inherently nonlinear problems.* Univ. California, Berkeley, CA. Tech Rep. UCB/ERLM92/65, June 1992.

[T4] A. Teel. *Connections between Razumikhin-type theorems and the ISS nonlinear small gain theorems.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 43, pp. 960-964, 1998.

[T5] A. Teel. *A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 41, (9), 1996.

[T6] A. Teel. *Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls.* Systems & Control Letters, 18, 165-171, 1992.

[TP] A. Teel, L. Praly. *Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback.* Systems & Control Letters, 22, pp. 313-325, 1994.

[TPH] D. Theilliol, J.C. Ponsart, J. Harmand, C. Join, P. Gras. *On line estimation of unmeasured inputs for anaerobic wastewater treatment processes.* Control Engineering Practice 11, 1007-1019, 2003.

[T6] J. Tsinias. *Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization.* Math. Control Signals Systems 2, pp. 343-357, 1989.

[T7] J. Tsinias. *Input to State Stability Properties of Nonlinear Systems and Applications to Bounded Feedback Stabilization Using Saturation.* ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations. Vol. 2, pp. 57-85, 1997.

[T8] J. Tsinias. *Backstepping design for time-varying systems and application to partial-static feedback and asymptotic tracking.* Systems & Control Letters, Vol. 39, pp. 219-227, 2000.

[TK] J. Tsinias, I. Karafyllis. *ISS property for time-varying systems and application to partial-static feedback stabilization and asymptotic tracking.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 44, pp. 2179-2184, 1999.

[WSE] K.Y. Wichlund, O.J. Sørdalen, O. Egeland. *Control of vehicles with second-order non-holonomic constraints : Underactuated vehicles.* 3rd European Control Conference, Rome, Italy, pp. 3086-3091, 1995.

[Z] J. Zabczyk. *Some comments on stabilizability.* Appl. Math. and Optimization, Vol. 19, pp. 1-9, 1989.