C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 915–920, 2000
Statistique/*Statistics*
(Probabilités/*Probability Theory*)

Représentation autorégressive du prédicteur à passé infini incomplet d'une série chronologique stationnaire

Pascal BONDON

Laboratoire des signaux et systèmes, CNRS UMR 8506, plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette cedex, France
Courriel : bondon@lss.supelec.fr

(Reçu le 10 juin 1999, accepté après révision le 3 avril 2000)

Résumé. Nous établissons dans cette Note, la représentation autorégressive du meilleur prédicteur linéaire en moyenne quadratique d'une série chronologique stationnaire basé sur toutes les observations du passé à l'exception d'un nombre fini d'entre elles dont les indices temporels sont quelconques. Ce résultat est obtenu sous les hypothèses suffisantes classiques d'existence d'une représentation autorégressive pour le prédicteur basé sur tout le passé. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Autoregressive representation of the predictor with incomplete past of a stationary time series

Abstract. *In this Note, we establish the autoregressive representation of the best linear mean-square predictor of a stationary time series based on all its observations in the past except a finite number of them which have arbitrary time indices. This result is obtained under the classical sufficient conditions of the existence of a mean-convergent autoregressive representation for the predictor based on the complete past.* © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ be a zero-mean purely nondeterministic weakly stationary time series with spectral density f. We denote by $\widehat{X}_0$ the best linear mean-square predictor of X_0 based on the past $\{X_k;\ k\leqslant -1\}$.

In order to be computable in practice, $\widehat{X}_0$ should have a mean-convergent autoregressive (AR) representation in terms of X_k, $k\leqslant -1$. There are two well-known sufficient conditions for the existence (and the uniqueness) of such a series, namely ($f\in \mathrm{L}_\infty$ and $f^{-1}\in \mathrm{L}_1$), [1,7], and $\theta>0$ where θ is the angle between the "past and present" subspace and the "future" subspace of (X_k), [6]. Neither of these conditions implies the other.

Note présentée par Paul DEHEUVELS.

S0764-4442(00)00287-1/FLA

It was shown by Bloomfield [2] that if $\widehat{X}_0$ has an AR representation, then for every $N > 0$, the linear predictor of X_0 based on the observations $\{X_k;\ k < -N\}$ possesses also an AR representation which is obtained by means of well-known relations, given for instance in [1] (*see* Example 1).

Cheng and Pourahmadi [3] proposed a recursive method to compute the linear predictor $\widehat{X}_0'$ of X_0 based on all its observations in the past, except a finite number of them, which have arbitrary time indices. The complexity of their algorithm depends on the indices of the missing observations and their method does not provide the AR representation of $\widehat{X}_0'$.

In this Note, we establish a formula for the AR representation of $\widehat{X}_0'$ by assuming either ($f \in \mathrm{L}_\infty$ and $f^{-1} \in \mathrm{L}_1$) or $\theta > 0$. This formula involves only the AR parameters (a_k) of (X_k).

Throughout the paper, $\overline{\mathrm{sp}}\{X_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ is the time domain of (X_k) and $\mathrm{L}_2(f)$ is its frequency domain. The space $\mathrm{L}_2(f)$ is endowed with the inner product (1) where $\mathrm{d}\lambda$ is the normalized Lebesgue measure on $(-\pi, \pi]$. The map $\mathcal{I}: X_k \mapsto \mathrm{e}^{ik\lambda}$ defines an isomorphism between $\overline{\mathrm{sp}}\{X_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ and $\mathrm{L}_2(f)$ ([4], p. 483). For any function g in L_2 with the Fourier series expansion $g(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k\,\mathrm{e}^{ik\lambda}$, we note $[g(\lambda)]_{0-} = \sum_{k=-\infty}^{0} g_k\,\mathrm{e}^{ik\lambda}$. For any integers k and n, $k \wedge n$ stands for the minimum of k and n, $\delta_k = 0$ when $k \neq 0$ and $\delta_0 = 1$. The set M is the finite set of integers defined by (2), and H is the subspace of $\mathrm{L}_2(f)$ defined by (3).

MAIN RESULT. – *If $f \in \mathrm{L}_\infty$ and $f^{-1} \in \mathrm{L}_1$, or if $\theta > 0$, then the projection h of the constant function 1 onto the subspace H is given by* (4) *where φ and ψ are defined respectively by* (5) *and* (6) *and the coefficients (ψ_k) satisfy the matrix equation* (7), *where U is the nonsingular $(N+1)\times(N+1)$ matrix with elements given by* (8). *Furthermore, $\|1-h\|^2 = \sigma^2\psi_0$, where σ^2 is defined by* (9).

The proof of this result consists in verifying that function h defined by (4) satisfies $h \in H$ and $1-h \perp H$. First, we show that $h \in \mathrm{L}_2(f)$ using $f^{-1} \in \mathrm{L}_1$ (which is implied by $\theta > 0$ ([9], p. 81). Next, we establish that $1-h \perp H$ by showing that the right-hand side of (10) is zero for $k \in \mathbb{N} \setminus M$ (the first term is zero for $k \notin M$ and the second term is zero for $k \in \mathbb{N}$). Then we show that each hypothesis ($f \in \mathrm{L}_\infty$ and $f^{-1} \in \mathrm{L}_1$) and $\theta > 0$ implies that $h \in \mathrm{L}_1$ and that the Fourier series of h converges to h in $\mathrm{L}_2(f)$. Afterwards, we prove that $h \in H$ by showing that $\int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda)\,\mathrm{e}^{ik\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = 0$ for $k \notin \mathbb{N} \setminus M$. For $k < 0$, this property follows from (4), and for $k \in M$, it results from (12) and (7). Next, we show that an immediate consequence of (8) is that U is positive definite. Lastly, the expression of $\|1-h\|^2$ is given by (13).

In Corollary 1, we establish the AR representation of the best linear mean-square predictor $\widehat{X}_0'$ of X_0 based on the incomplete past $\{X_{-k};\ k \in \mathbb{N} \setminus M\}$. Since $\widehat{X}_0'$ is the projection of X_0 onto $\overline{\mathrm{sp}}\{X_{-k};\ k \in \mathbb{N} \setminus M\}$ and the isomorphism $\mathcal{I}$ is an isometric operator, we have $\widehat{X}_0' = \mathcal{I}^{-1}(h)$. Under the hypotheses of the main result, h has a Fourier series expansion $h(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus M} h_k\,\mathrm{e}^{-ik\lambda}$ where the series converges in $\mathrm{L}_2(f)$. This implies that $\widehat{X}_0'$ has the AR representation (14) where the coefficients (h_k) are given by (12).

In Example 1, we show that the results of ([1], Theorem 2) can be obtained from (12) in the particular case where $M = \{0, 1, \ldots, N\}$. In Example 2, we assume that (X_k) is the causal AR process of order r given by (15) and we show that the AR representation of $\widehat{X}_0'$ reduces to (16).

---

1. Introduction

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une série chronologique centrée stationnaire au second ordre et purement non déterministe de densité spectrale f. On note $\widehat{X}_0$ le meilleur prédicteur linéaire en moyenne quadratique de X_0 en fonction du passé $\{X_k;\ k \leqslant -1\}$.

Pour être calculable en pratique, $\widehat{X}_0$ doit avoir une représentation autorégressive (AR) convergente en moyenne quadratique en fonction des X_k, $k \leqslant -1$. Deux conditions bien connues garantissent l'existence (et l'unicité) d'une telle représentation. Il s'agit de ($f \in \mathrm{L}_\infty$ et $f^{-1} \in \mathrm{L}_1$), [1,7], et de $\theta > 0$ où θ est l'angle entre le sous-espace « passé et présent » et le sous-espace « futur » de (X_k), [6]. Aucune de ces conditions n'implique l'autre.

Bloomfield [2] a montré que si $\widehat{X}_0$ admet une représentation AR, alors quelque soit $N>0$, le prédicteur linéaire de X_0 en fonction des observations $\{X_k;\ k<-N\}$ admet aussi une représentation AR que l'on obtient au moyen de relations données par exemple dans [1] (*voir* exemple 1).

Cheng et Pourahmadi [3] ont proposé une méthode récursive pour calculer le prédicteur linéaire $\widehat{X}_0'$ de X_0 en fonction de toutes les observations du passé à l'exception d'un nombre fini d'entre elles dont les indices temporels sont quelconques. La complexité de leur algorithme dépend des indices des observations manquantes et leur méthode ne fournit pas la représentation AR de $\widehat{X}_0'$.

Dans cette Note, nous établissons une formule pour la représentation AR de $\widehat{X}_0'$ en supposant ($f\in \mathrm{L}_\infty$ et $f^{-1}\in \mathrm{L}_1$) ou $\theta>0$. Cette formule fait uniquement intervenir les paramètres AR (a_k) de (X_k).

Dans la suite, $\overline{\mathrm{sp}}\,\{X_k;\ k\in\mathbb{Z}\}$ est le domaine temporel de (X_k) et $\mathrm{L}_2(f)$ est son domaine fréquentiel. L'espace $\mathrm{L}_2(f)$ est muni du produit scalaire

$$(g,h)=\int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda)\,\overline{h(\lambda)}\,f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \tag{1}$$

où $\mathrm{d}\lambda$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur $]-\pi,\pi]$. L'application $\mathcal{I}: X_k\mapsto \mathrm{e}^{ik\lambda}$ définit un isomorphisme entre $\overline{\mathrm{sp}}\,\{X_k;\ k\in\mathbb{Z}\}$ et $\mathrm{L}_2(f)$ ([4], p. 483). On désigne par L_2^{0+}, L_2^{+} et L_2^{0-} les sous-espaces de L_2 des fonctions g dont les k-èmes coefficients de Fourier $g_k=\int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda)\,\mathrm{e}^{-ik\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$ s'annulent respectivement pour $k<0$, $k\leqslant 0$ et $k>0$; on note $[g]_+$ et $[g]_{0-}$ les fonctions de L_2^{+} et L_2^{0-} dont les k-ièmes coefficients de Fourier sont g_k pour $k>0$ et $k\leqslant 0$. Enfin, pour tous entiers k et n, $k\wedge n$ désigne le minimum de k et n, $\delta_k=0$ pour $k\neq 0$ et $\delta_0=1$.

2. Représentation AR du prédicteur à passé infini incomplet

Soit

$$M=\{n_0,n_1,\dots,n_N\},\quad 0=n_0<n_1<\cdots<n_N, \tag{2}$$

un ensemble fini d'entiers et $\widehat{X}_0'$ la projection de X_0 sur $\overline{\mathrm{sp}}\{X_{-k};\ k\in\mathbb{N}\setminus M\}$. Comme $\mathcal{I}$ est une isométrie, $\mathcal{I}(\widehat{X}_0')$ est la projection de la fonction constante 1 sur le sous-espace H de $\mathrm{L}_2(f)$ défini par :

$$H=\overline{\mathrm{sp}}\{\mathrm{e}^{-ik\lambda};\ k\in\mathbb{N}\setminus M\}. \tag{3}$$

THÉORÈME 1. – *Soit (X_k) une série chronologique centrée stationnaire au second ordre purement non déterministe de densité spectrale f. Soient θ l'angle entre le sous-espace « passé et présent » et le sous-espace « futur » de (X_k) et (a_k) les paramètres AR de (X_k) avec $a_0=1$. Si $f\in\mathrm{L}_\infty$ et $f^{-1}\in\mathrm{L}_1$, ou si $\theta>0$, la projection h de* 1 *sur le sous-espace H de $\mathrm{L}_2(f)$ défini par* (3) *est donnée par*

$$h=1-\overline{\varphi}\,[\varphi\psi]_{0-}, \tag{4}$$

où

$$\varphi(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\mathrm{e}^{ik\lambda}, \tag{5}$$

$$\psi(\lambda)=\sum_{k=0}^{N} \psi_k\,\mathrm{e}^{-in_k\lambda} \tag{6}$$

et les coefficients (ψ_k) *satisfont l'équation matricielle*

$$U(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_N)' = (1, 0, \ldots, 0)', \tag{7}$$

U *étant la matrice inversible de dimension* $N+1$ *d'éléments*

$$U_{p,q} = \sum_{j=0}^{n_p \wedge n_q} a_{n_p - j}\, a_{n_q - j}, \quad p, q = 0, \ldots, N. \tag{8}$$

De plus, $\|1-h\|^2 = \sigma^2 \psi_0$*, où*

$$\sigma^2 = \exp\left[\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda\right]. \tag{9}$$

Démonstration. – La fonction h étant la projection de 1 sur H, h est caractérisée par $h \in H$ et $1 - h \perp H$.

1) Vérifions tout d'abord que h donnée par (4) appartient à $\mathrm{L}_2(f)$. Comme la condition $\theta > 0$ implique que $f^{-1} \in \mathrm{L}_1$ ([9], p. 81), sous les hypothèses du théorème on a donc $f^{-1} \in \mathrm{L}_1$. Par conséquent, $f = \sigma^2 |\varphi|^{-2}$ et $\varphi \in \mathrm{L}_2$. Puisque $\psi \in \mathrm{L}_\infty$, on a donc $\varphi\psi \in \mathrm{L}_2$. Il découle alors de (4) que $\|1-h\|^2 = \sigma^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left|[\varphi(\lambda)\, \psi(\lambda)]_{0-}\right|^2 \mathrm{d}\lambda < \infty$. Donc $1 - h \in \mathrm{L}_2(f)$ et comme $1 \in \mathrm{L}_2(f)$ car $f \in \mathrm{L}_1$, on obtient que $h \in \mathrm{L}_2(f)$.

2) Montrons que $1 - h \perp H$. Soit $k \in \mathbb{Z}$, on déduit de (4) que

$$\begin{aligned}\left(1 - h(\lambda), \mathrm{e}^{-ik\lambda}\right) &= \sigma^2 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda)^{-1} \left[\varphi(\lambda)\psi(\lambda)\right]_{0-} \mathrm{e}^{ik\lambda}\, \mathrm{d}\lambda \\ &= \sigma^2 \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\lambda)\, \mathrm{e}^{ik\lambda} \mathrm{d}\lambda - \sigma^2 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda)^{-1} \left[\varphi(\lambda)\, \psi(\lambda)\right]_{+} \mathrm{e}^{ik\lambda}\, \mathrm{d}\lambda.\end{aligned} \tag{10}$$

D'après (6), le premier terme de droite de (10) est nul pour $k \notin M$. D'autre part, $\varphi(\lambda)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, \mathrm{e}^{ik\lambda}$, où les coefficients (c_k) sont les paramètres MA de (X_k) et satisfont $c_0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 < \infty$. D'où $\varphi^{-1} \in \mathrm{L}_2^{0+}$. Comme $[\varphi\psi]_+ \in \mathrm{L}_2^{+}$, le second terme de droite de (10) est donc nul pour $k \in \mathbb{N}$. On a donc $\left(1 - h(\lambda), \mathrm{e}^{-ik\lambda}\right) = 0$ pour $k \in \mathbb{N} \setminus M$, ce qui implique que $1 - h \perp H$.

3) Montrons que h admet un développement en série de Fourier qui converge vers h dans $\mathrm{L}_2(f)$. Si $\theta > 0$, $\mathrm{L}_2(f) \subset \mathrm{L}_1$ et la série de Fourier de toute fonction g de $\mathrm{L}_2(f)$ converge vers g dans $\mathrm{L}_2(f)$, [6]. En prenant $g = h$, on a donc le résultat. Si $f \in \mathrm{L}_\infty$, $0 \leqslant f \leqslant C$ p.p., on déduit de (1) que $\|g\|^2 \leqslant C \int_{-\pi}^{\pi} |g(\lambda)|^2\, \mathrm{d}\lambda$, et donc la convergence dans L_2 implique la convergence dans $\mathrm{L}_2(f)$. Il suffit donc de montrer que $h \in \mathrm{L}_2$. On déduit de (5) et (6) que

$$\left[\varphi(\lambda)\, \psi(\lambda)\right]_{0-} = \sum_{q=0}^{N} \psi_q \sum_{j=0}^{n_q} a_{n_q - j}\, \mathrm{e}^{-ij\lambda}. \tag{11}$$

Par conséquent, $[\varphi\psi]_{0-} \in \mathrm{L}_\infty$. Comme $\varphi \in \mathrm{L}_2$, on a $\overline{\varphi}\, [\varphi\psi]_{0-} \in \mathrm{L}_2$ et on déduit de (4) que $h \in \mathrm{L}_2$.

4) Vérifions que $h \in H$. Notons $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k\, \mathrm{e}^{-ik\lambda}$ le développement en série de Fourier de h. Il suffit de montrer que $h_k = 0$ pour $k \notin \mathbb{N} \setminus M$. Comme $\overline{\varphi}\, [\varphi\psi]_{0-} \in \mathrm{L}_2^{0-}$, $h \in \mathrm{L}_2^{0-}$ et donc $h_k = 0$ pour $k < 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$, on déduit de (4) et de (11) que

$$\begin{aligned}h_k &= \int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda)\, \mathrm{e}^{ik\lambda}\, \mathrm{d}\lambda = \delta_k - \sum_{q=0}^{N} \psi_q \sum_{j=0}^{n_q} a_{n_q - j} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell\, \mathrm{e}^{i(k-j-\ell)\lambda}\, \mathrm{d}\lambda \\ &= \delta_k - \sum_{q=0}^{N} \psi_q \sum_{j=0}^{n_q \wedge k} a_{n_q - j}\, a_{k-j}.\end{aligned} \tag{12}$$

Supposons que $k \in M$, i.e., $k = n_p$ où $p \in \{0, \ldots, N\}$. On déduit de (12) que $h_{n_p} = \delta_{n_p} - \sum_{q=0}^{N} U_{p,q}\psi_q$, où $U_{p,q}$ est défini par (8). Il résulte de l'équation (7) que $h_{n_p} = 0$ pour tout $p \in \{0, \ldots, N\}$. En résumé, $h_k = 0$ pour $k < 0$ et pour $k \in M$, et donc $h \in H$.

5) Montrons que la matrice U est définie positive ce qui implique son inversibilité. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{N+1}$, on déduit de (8) que $\alpha' U \alpha = \sum_{j=0}^{n_N} \left(\sum_{p=0}^{N} \alpha_p a_{n_p - j} \right)^2$, où $a_k = 0$ pour $k < 0$. Donc $\alpha' U \alpha = 0$ est équivalent à $\sum_{p=0}^{N} \alpha_p a_{n_p - j} = 0$ pour $j = 0, \ldots, n_N$. En prenant successivement $j = n_N, n_{N-1}, \ldots, n_0$ et en utilisant le fait que $a_0 = 1$, on obtient $\alpha_N = \alpha_{N-1} = \cdots = \alpha_0 = 0$.

6) On a

$$\|1 - h\|^2 = \sigma^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left[\varphi(\lambda)\psi(\lambda) \right]_{0-} \right|^2 \mathrm{d}\lambda = \sigma^2 \sum_{p,q=0}^{N} \psi_p U_{p,q} \psi_q = \sigma^2 \psi_0. \qquad \square \tag{13}$$

Remarque 1. – Sous les hypothèses du théorème 1, on a $\operatorname{var}(X_0 - \widehat{X}_0') = \|1 - h\|^2 = \sigma^2 \psi_0$. Une expression équivalente de $\operatorname{var}(X_0 - \widehat{X}_0')$ peut être obtenue en utilisant ([5], théorème 1) ou ([8], théorème 1).

COROLLAIRE 1. – *Sous les hypothèses du théorème* 1, $\widehat{X}_0'$ *admet la représentation AR*

$$\widehat{X}_0' = \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus M} h_k X_{-k}, \tag{14}$$

où les coefficients (h_k) *sont donnés par* (12).

Démonstration. – On a $h(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \, \mathrm{e}^{-ik\lambda}$ où la série converge dans $\mathrm{L}_2(f)$. Donc $\widehat{X}_0' = \mathcal{I}^{-1}(h) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k X_{-k}$ où la série converge en moyenne quadratique. Les coefficients h_k sont nuls pour $k \notin \mathbb{N} \setminus M$ et sont donnés par (12) pour $k \in \mathbb{N} \setminus M$. $\square$

Exemple 1. – Lorsque $M = \{0, 1, \ldots, N\}$, $\widehat{X}_0'$ est la prédiction à $(N+1)$ pas de X_0 et il est facile de déduire de (12) que $h_k = \delta_k - \sum_{j=0}^{N \wedge k} c_j a_{k-j}$, ce qui est équivalent à la relation bien connue donnée par exemple dans ([1], théorème 2).

Exemple 2. – Supposons que (X_k) soit un processus AR causal d'ordre r :

$$\sum_{j=0}^{r} a_j X_{k-j} = \varepsilon_k, \quad a_0 = 1, \quad 1 \leqslant r < \infty. \tag{15}$$

La densité spectrale f de (X_k) satisfait $f \in \mathrm{L}_\infty$ et $f^{-1} \in \mathrm{L}_\infty$. Comme (X_k) est causal, (ε_k) est le processus d'innovation de (X_k) et $a_0, \ldots, a_r$ sont les paramètres AR de (X_k). On déduit alors de (12) que $h_k = 0$ pour $k > n_N + r$ et il découle donc de (14) que

$$\widehat{X}_0' = \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin M}}^{n_N + r} h_k X_{-k}. \tag{16}$$

Lorsque le passé est complet, $M = \{0\}$ et (16) donne le résultat bien connu $\widehat{X}_0 = -\sum_{k=1}^{r} a_k X_{-k}$.

Références bibliographiques

[1] Akutowicz E.J., On an explicit formula in linear least squares prediction, Math. Scand. 5 (1957) 261–266.

[2] Bloomfield P., On series representations for linear predictors, Ann. Probab. 13 (1) (1985) 226–233.

[3] Cheng R., Pourahmadi M., Prediction with incomplete past and interpolation of missing values, Statis. Probab. Lett. 33 (1997) 341–346.
[4] Doob J.L., Stochastic Processes, Wiley, New York, 1953.
[5] Grenander U., Rosenblatt M., An extension of a theorem of G. Szegö and its application to the study of stochastic processes, Trans. Amer. Math. Soc. 76 (1954) 112–126.
[6] Helson H., Szegö G., A problem in prediction theory, Ann. Mat. Pura Appl. 51 (1960) 107–138.
[7] Masani P., The prediction theory of multivariate stochastic processes, III, Acta Math. 104 (1960) 141–162.
[8] Pourahmadi M., Two prediction problems and extensions of a theorem of Szegö, Bull. Iranian Math. Soc. 19 (2) (1994) 1–12.
[9] Sarason D., Function Theory on the Unit Circle, Lect. Notes, Virginia Poly. Inst. and State Univ., Virginia, 1978.